

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
**SETOR DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS**  
**MESTRADO EM CONTABILIDADE**  
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: CONTABILIDADE E FINANÇAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS: ANÁLISE DOS IMPACTOS FINANCEIROS E PATRIMONIAIS.**

**JACKSON CIRO SANDRINI**

**CURITIBA**

**2007**

**“SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E A CAPITALIZAÇÃO DOS JUROS: ANÁLISE DOS IMPACTOS FINANCEIROS E PATRIMONIAIS”**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CONTABILIDADE (AREA DE CONCENTRAÇÃO: CONTABILIDADE E FINANÇAS), E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONTABILIDADE DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ.**

**PROF. DR. LAURO BRITO DE ALMEIDA  
COORDENADOR DO MESTRADO**

**APRESENTADO À COMISSÃO EXAMINADORA INTEGRADA PELOS PROFESSORES:**

**PROF. DR. ANA PAULA MUSSI SZABO CHEROBIM  
PRESIDENTE**

**PROF. DR. ADEMIR CLEMENTE  
MEMBRO**

**PROF. DR. ALCEU SOUZA  
MEMBRO**

JACKSON CIRO SANDRINI

**SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS: ANÁLISE DOS IMPACTOS FINANCEIROS E PATRIMONIAIS.**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau do Mestre. Curso de Mestrado em Contabilidade, do Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná.

Profª Drª Ana Paula Mussi Szabo Cherobim

**CURITIBA**

**2007**

God,  
grant me the serenity to accept the things I can't change,  
the courage to change the things I can,  
and the wisdom to know the difference. (Wiston Churchill)

À minha família, Cristina, Lígia, Lucas e Vítor,  
a quem nunca poderei agradecer o suficiente.

## AGRADECIMENTOS

Escrever uma dissertação é trabalho solitário, ainda que essencial o auxílio de pessoas e instituições, a quem agradeço:

À Universidade Federal do Paraná, a oportunidade.

Aos Professores do Programa, os desafios que me foram apresentados; em especial, ao Professor Ademir Clemente, o estímulo constante e o auxílio à pesquisa e ao estudo.

Aos Membros da Banca Examinadora, a crítica e o respaldo científico.

À minha orientadora Ana Paula Mussi Szabo Cherobim, peça fundamental desde a construção do projeto até a finalização, a contribuição decisiva no enriquecimento desta dissertação.

Aos colegas de turma, o convívio e o ambiente de diversidade intelectual ao longo do curso. Em especial, ao professor Sílvio Matucheski, companheiro único de uma equipe vencedora.

A todas as pessoas que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução deste trabalho. Mesmo aquelas que não prestaram colaboração, acabaram por me instigar a vencer novos desafios.

E, finalmente, a todos os brasileiros, que de forma anônima, por meio de seus impostos, têm mantido esta instituição pública e gratuita.

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
1.1	TEMA.....	14
1.2	DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	15
1.3	QUESTÃO DE PESQUISA.....	15
1.4	OBJETIVOS.....	15
1.4.1	Objetivo Geral.....	15
1.4.2	Objetivos Específicos.....	16
1.5	PRESSUPOSTOS TEÓRICOS.....	16
1.6	FLUXO DA PESQUISA.....	17
1.7	JUSTIFICATIVAS.....	18
<b>2.</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>20</b>
2.1	REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO DOS JUROS.....	20
2.1.1	Capitalização Contínua.....	21
2.1.2.	Capitalização Descontínua.....	21
2.1.2.1	Capitalização Simples.....	21
a)	Classificação de taxas.....	23
b)	Formas de apresentação da taxa.....	24
2.1.2.2	Capitalização Composta.....	24
a)	Classificação de taxas.....	26
b)	Formas de apresentação da taxa.....	28
2.1.3	Distinção entre os regimes de juros simples e composto.....	30
2.1.4	Aspectos legais.....	30
2.1.5	Aspectos contábeis.....	34
2.2	EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS.....	38
2.2.1	Equivalência de capitais em juros simples.....	41
2.2.2	Equivalência de capitais em juros compostos.....	42
2.2.3	Equivalência de fluxos de caixa.....	44
a)	Fluxos uniformes ou homogêneos.....	44
b)	Fluxos não-uniformes ou não-homogêneos.....	50
2.3	SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS.....	53
2.3.1	Sistema Francês de Amortização – Tabela Price.....	57
2.3.2	Sistema de Amortização Constante – SAC.....	59
2.3.3	Sistema de Amortização Misto – SAM.....	59
2.3.4	Sistema de Amortização Crescente – SACRE.....	60
2.3.5	Sistema de Amortização Americano – SAA.....	61
2.3.6	Sistema de Prestação Constante – JUROS SIMPLES.....	62
2.3.7	Sistema de Prestação Constante – Método de Gauss.....	63
<b>3.</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA.....</b>	<b>65</b>
3.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.....	66
3.2	MÉTODOS.....	68
<b>4.</b>	<b>ANÁLISE DOS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO.....</b>	<b>71</b>

4.1	EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS.....	71
4.1.1	Equivalência em juros simples.....	71
4.1.2	Equivalência em juros compostos.....	74
4.2	CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA.....	76
4.2.1	Capitalização simples.....	77
4.2.2	Capitalização composta.....	77
4.2.3	Aplicação de dinheiro.....	77
4.2.4	Empréstimo de dinheiro.....	91
<b>5.</b>	<b>ANÁLISE DOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO Price e SAC.....</b>	<b>102</b>
5.1	SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO – Tabela Price.....	102
5.1.1	Evidências da capitalização composta.....	111
a)	Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes.....	111
b)	Há juros embutidos nos saldos devedores.....	121
5.2	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC.....	148
5.2.1	Evidências da capitalização composta.....	151
a)	Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes.....	151
b)	Há juros embutidos nos saldos devedores.....	166
<b>6.</b>	<b>ANÁLISE DE OUTROS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO.....</b>	<b>196</b>
6.1	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO – SAM.....	196
6.2	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CRESCENTE – SACRE.....	200
6.3	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO – SAA.....	205
6.3.1	Evidências da capitalização composta.....	209
a)	Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes.....	209
b)	Há juros embutidos nos saldos devedores.....	219
6.4	SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE – Método de Gauss.....	241
<b>7.</b>	<b>EFEITOS DA CAPITALIZAÇÃO DE JUROS.....</b>	<b>252</b>
7.1	A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS E O IMPACTO PATRIMONIAL.....	252
7.2	A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS E O REFLEXO NO BENEFÍCIO FISCAL.....	257
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>261</b>
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>268</b>

## RELAÇÃO DE QUADROS

1	Níveis de divulgação de informações financeiras.....	35
2	Capitalização simples – aplicação única, com resgate final.....	77
3	Capitalização composta – aplicação única, com resgate final.....	80
4	Regimes de capitalização dos juros – aplicação única, com resgate final.....	82
5	Capitalização composta – várias aplicações, com resgate final.....	83
6	Capitalização composta – várias aplicações, com resgates parciais.....	86
7	Capitalização composta – aplicação única, com resgates parciais.....	88
8	Capitalização simples – liberação única, com pagamento final.....	91
9	Capitalização composta – liberação única, com pagamento final.....	93
10	Capitalização composta – várias liberações, com pagamento final.....	95
11	Capitalização composta – várias liberações, com pagamentos parciais.....	97
12	Capitalização composta – liberação única, com pagamentos parciais.....	99
13	Tabela Price – planilha-formulário.....	104
14	Tabela Price – pagamentos e saldos devedores.....	122
15	Tabela Price – planilha tradicional.....	124
16	Produção de laranjas <i>versus</i> descartes.....	126
17	Prestações do Price – empréstimos distintos (composto).....	128
18	Prestações constantes (Price) – empréstimos distintos (simples).....	133
19	Tabela Price – saldo devedor na data zero, capitalizado (composto).....	138
20	Tabela Price – saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).....	141
21	Tabela Price – decomposição periódica do SD de empréstimos distintos (simples).....	142
22	Tabela Price – decomposição periódica do SD de empréstimos distintos (composto)....	145
23	Sistema SAC – planilha-formulário.....	149
24	Sistema SAC – planilha tradicional.....	153
25	Sistema SAC – pagamentos e saldos devedores.....	167
26	Prestações do SAC – empréstimos distintos (composto).....	171
27	Prestações do SAC – empréstimos distintos (simples).....	175
28	Amortizações do SAC – empréstimos distintos (composto).....	177
29	Amortizações do SAC – empréstimos distintos (simples).....	178
30	Prestações do SAC – saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).....	181
31	Prestações do SAC – saldo devedor na data zero, capitalizado (composto).....	183
32	Amortizações do SAC – saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).....	184
33	Amortizações do SAC – saldo devedor na data zero, capitalizado (composto).....	185
34	Prestações do SAC – decomposição periódica do SD de empréstimos (simples).....	187
35	Prestações do SAC – decomposição periódica do SD de empréstimos (composto).....	190
36	Amortizações do SAC – decomposição periódica do SD de empréstimos (simples).....	193
37	Amortizações do SAC – decomposição periódica do SD de empréstimos (composto)...	194
38	Sistema SAM – planilha tradicional.....	197
39	Sistema SAM – decomposição periódica do SD de empréstimos (composto).....	198
40	Sistema SACRE – planilha tradicional.....	202
41	Sistema SACRE – decomposição periódica do SD de empréstimos (composto).....	203
42	Sistema SAA – planilha-formulário.....	207
43	Sistema SAA – pagamentos e saldos devedores.....	219
44	Sistema SAA – planilha tradicional.....	221



45	Prestações do SAA – empréstimos distintos (composto).....	224
46	Prestações constantes (SAA) – empréstimos distintos (simples).....	226
47	Sistema SAA – saldo devedor na data zero, capitalizado (composto).....	230
48	Sistema SAA – saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).....	233
49	Sistema SAA – decomposição periódica do SD de empréstimos (simples).....	234
50	Sistema SAA – decomposição periódica do SD de empréstimos (composto).....	238
51	Método de Gauss – planilha tradicional.....	246
52	Método de Gauss – decomposição periódica do SD de empréstimos (simples).....	250
53	Consolidação das planilhas de amortização para determinação dos impactos.....	254
54	Impacto patrimonial contábil e financeiro.....	255
55	Valor-base para cálculo do impacto no benefício fiscal contábil e financeiro.....	258

## RELAÇÃO DE APÊNDICES

1	Tabela Price – Planilha tradicional (normal).....	275
2	Tabela Price – Equivalência em capitalização composta.....	276
3	Tabela Price – Equivalência em capitalização simples.....	277
4	Sistema SAC – Planilha tradicional (normal).....	278
5	Sistema SAC – Equivalência em capitalização composta.....	279
6	Sistema SAC – Equivalência em capitalização simples.....	280
7	Sistema SAM – Planilha tradicional (normal).....	281
8	Sistema SAM – Equivalência em capitalização composta.....	282
9	Sistema SAM – Equivalência em capitalização simples.....	283
10	Sistema SACRE – Planilha tradicional (normal).....	284
11	Sistema SACRE – Equivalência em capitalização composta.....	285
12	Sistema SACRE – Equivalência em capitalização simples.....	286
13	Sistema SAA – Planilha tradicional (normal).....	287
14	Sistema SAA – Equivalência em capitalização composta.....	288
15	Sistema SAA – Equivalência em capitalização simples.....	289

## RESUMO

Estabeleceu-se no sistema judiciário brasileiro uma controvérsia relacionada ao regime de capitalização de juros, quando dos questionamentos legais sobre a liquidação de empréstimos por meio de parcelas periódicas. O objetivo deste trabalho é elucidar a forma de capitalização de juros utilizada nos sistemas de amortização de empréstimos mais usuais no país e suas conseqüências contábeis, com reflexos no patrimônio, e financeiras, com reflexos fiscais. A pesquisa pode ser classificada como aplicada, bibliográfica, descritiva e explicativa. A metodologia deste trabalho segue abordagem racional e dedutiva, por meio de comprovação matemática de pressupostos teóricos. O raciocínio parte do conceito de equivalência financeira para estabelecer a incorporação dos juros nos fluxos de capitais. O desenvolvimento matemático considera que só há dois regimes de capitalização dos juros, simples e composto, e são mutuamente excludentes. A diferença entre eles reside apenas no fracionamento do prazo de aplicação. A demonstração permite verificar que qualquer operação não liquidada integralmente no seu vencimento caracteriza a incidência de juros sobre juros, independente a que título se denomine ou contabilize o pagamento parcial. A capitalização composta nos sistemas de amortização usuais na realidade brasileira é comprovada por meio de quatro formas distintas de cálculo, nos dois regimes: i) caracterização algébrica no desenvolvimento do problema; ii) descapitalização das parcelas para equivalência a valor presente; iii) descapitalização das parcelas para comparação das taxas e iv) demonstração da existência de juros nos saldos devedores, utilizando quatro formas distintas de cálculo, nos dois regimes: i) caracterização algébrica no desenvolvimento do problema; ii) aplicação da fórmula genérica de juros compostos; iii) determinação dos saldos devedores na data zero e capitalizando até a data do saldo devedor pretendido; e iv) desdobramento dos saldos devedores.

**Palavras-chave:** Amortização e Capitalização. Prestações e Saldo Devedor. Patrimônio e Benefício Fiscal.

## **ABSTRACT**

It has stayed on Brazilian judiciary system a controversy about interest capitalization mode, on the legal questioning relative to entire payment of mortgage loan acquit by regular payments. The main purpose of this dissertation is to make clear the interest capitalization mode adopted on the most useful amortizations systems in the country and its accountability and financial consequences, as assets impacts and fiscal impacts. The research may be classified as applied, biographical, descriptive and explanatory. The methodology follows rational and deductive approach, by mathematical verification of theoretical purposes. The argumentation starts on financial equivalence concepts in order to establish the aggregation of interests on capital flow. The math verification considers just two interest capitalization mode: simple and compound, and that they are both excluding. The only difference between them is the possibility of fractionize the application period. The demonstration allows verifying that any operation that hasn't been totally squared during this contracted period characterizes interest on interest and it does not depend on the name or the accountability of the partial payments. The compound capitalization on the most useful amortizations system used in Brazil is proved by four different manners, considering the two modes: algebraic characterization, payment descapitalization to present value, payment descapitalization to compare interest taxes and the demonstration of the existence of interest on debt balance. It is done developing the same thought in four ways: algebraic characterization, compound interest form, and balance due determination on the zero-date and calculate capitalization until the future date and balance due unrolling.

**Keywords:** Amortization and Capitalization. Payments and debt balance. Assets and fiscal benefit.

## 1 INTRODUÇÃO

A intermediação financeira é inerente ao sistema capitalista. Excedentes de recursos financeiros das pessoas físicas e jurídicas são destinados ao sistema financeiro visando otimizar a utilização desses recursos, por meio de aplicações no mercado financeiro. Esses recursos constituem *funding*<sup>1</sup> (colchão de recursos) às instituições financeiras, que os direcionam aos tomadores que necessitam desses recursos para produzir, administrar seu fluxo de caixa ou atender a necessidades imediatas de consumo.

O processo de investimento reúne por meio de uma instituição financeira os agentes superavitários, fornecedores de fundos excedentes, as suas oportunidades de investimento, e os agentes deficitários, tomadores desses fundos, em função de identificarem mais oportunidades de investimento que os recursos disponíveis. Para Brigham e Ehrhardt (2006, p. 159) uma economia saudável depende da eficiência da transferência de fundos das pessoas que têm poupanças líquidas às empresas e indivíduos que precisam de capital, e é absolutamente fundamental que os mercados financeiros funcionem tanto de forma célere, como a um custo baixo.

A dinâmica da circulação dos recursos é importante para as atividades econômico-financeiras das pessoas, das empresas, dos governos e demais agentes. Essa intermediação financeira é implementada por meio de Bancos Comerciais, de Desenvolvimento, de Fomento, de Investimento, Caixas Econômicas, Cooperativas de Crédito, Sociedades Financeiras, de Crédito Imobiliário e Arrendadoras. A promoção e efetivação de empréstimos e financiamentos podem também ocorrer por intermédio de empresas comerciais, via crédito direto ao consumidor, para ser liquidados em uma única ou mais parcelas.

O mercado financeiro, segundo Lemes Júnior, Rigo e Cherobim (2005, p. 15), é a reunião de instituições financeiras aptas a intermediar recursos, tomando emprestado dos agentes superavitários, por meio de captações, a quem remuneram, e transferindo aos agentes deficitários, por meio de empréstimos, dos quais recebem juros.

A Figura 1 ilustra a referida intermediação, por meio da qual se observa que os agentes superavitários podem transferir seus fundos aos demandantes, agentes deficitários, por meio de intermediários financeiros, representados por instituições financeiras e, muito raramente, por transações diretas.

---

<sup>1</sup> Fundo, fonte de recursos.

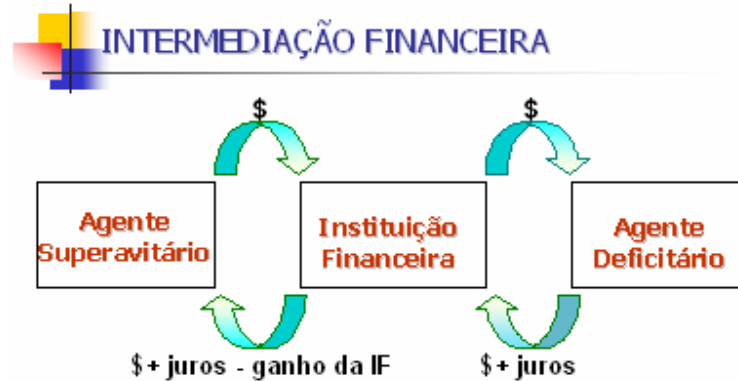


Figura 1: Intermediação Financeira  
Fonte: Elaborada pelo autor.

O mercado financeiro negocia produtos de investimento e de financiamento, que se constituem em instrumentos de captação das instituições financeiras e de aplicação dos agentes superavitários, e de instrumentos de aplicação de recursos das instituições financeiras e de captação para os agentes deficitários, respectivamente.

Os financiamentos de curto prazo são geralmente liquidados em uma única parcela, que engloba encargos financeiros (juros) e capital (amortização). Para a liquidação financiamentos de longo prazo, desenvolvem-se sistemas de amortização, com análises mais bem estruturadas, de forma a possibilitar sua liquidação em uma série de prestações iguais ou não, normalmente periódicas, que também englobam encargos financeiros e capital. As prestações podem ser constantes ou não, antecipadas, postecipadas ou diferidas, sob uma taxa efetiva de juros. Cada uma das possibilidades de combinação de periodicidade, prestações e formas de cálculo de juro, caracteriza os diferentes Sistemas de Amortização.

Quando o empréstimo ou financiamento é amortizado periodicamente, existe preferência para que as parcelas sejam constantes, porquanto facilitam consideravelmente a administração do fluxo de caixa, tanto do credor, como do tomador do empréstimo.

## 1.1 TEMA

Capitalização de juros nos sistemas de amortização de empréstimos e seus impactos financeiros e patrimoniais.

## 1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

O presente estudo tem como foco principal os Sistemas de Amortização de Empréstimos mais usuais na realidade brasileira, o regime de capitalização dos juros e seus impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos: Sistema Francês de Amortização - Tabela Price e Sistema de Amortização Constante – SAC. A análise é estendida a outros sistemas de amortização que, embora com utilização em menor intensidade, têm se mostrado úteis nos empréstimos de longo prazo: Sistema de Amortização Misto – SAM; Sistema de Amortização Crescente – SACRE; Sistema de Amortização Americano - SAA; Sistema de Prestação Constante – Juros Simples e Sistema de Prestação Constante – Método de Gauss.

## 1.3 QUESTÃO DE PESQUISA

Quais os impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos, resultantes dos sistemas de amortização, ao se adotar o regime de capitalização de juros simples ou composto?

## 1.4. OBJETIVOS

O tema de pesquisa, capitalização de juros e sistemas de amortização, consubstancia-se em questão de pesquisa ao se propor a investigar os impactos financeiros e patrimoniais quando da adoção do regime de capitalização de juros simples ou composto.

Destarte, o objetivo geral contempla a questão de pesquisa em toda a sua complexidade e os objetivos específicos incorporam cada uma das facetas da questão de pesquisa.

### 1.4.1 Objetivo Geral

- Determinar os impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos, e caracterizar qual regime de capitalização de juros, simples ou composto, é utilizado nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Demonstrar a equivalência de capitais e de fluxo de caixa na capitalização simples e composta.
- Demonstrar que os sistemas de amortização e de capitalização são convergentes.
- Caracterizar o regime de capitalização e desenvolver as planilhas, em moeda constante, com parcelas periódicas, postecipadas, constantes ou não, nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.
- Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos pagamentos em cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no patrimônio dos tomadores de empréstimos.
- Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos juros de cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no valor do benefício fiscal dos tomadores de empréstimos.

### 1.5 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Foram estabelecidas dez proposições teóricas, cujas asserções dependem de comprovação matemática:

- O regime de capitalização dos juros é composto se o somatório do valor presente das parcelas, descontadas pelo fator de descapitalização a juros compostos, for igual ao valor do empréstimo.
- O regime de capitalização dos juros é simples se o somatório do valor presente das parcelas, descontadas pelo fator de descapitalização a juros simples, for igual ao valor do empréstimo.
- O saldo devedor, base de cálculo dos juros do período, contém parcela de capital e juros vencidos e não pagos.
- Os pagamentos no Sistema Price, SAC, SAM, SACRE e SAA são efetivados em montantes, restando montantes como saldos devedores.



- O regime de capitalização dos juros é composto se a taxa que zera o fluxo de caixa, formado pelo valor do empréstimo e valor das parcelas periódicas, for determinada por meio da equivalência em juros compostos.
- O regime de capitalização dos juros é simples se a taxa que zera o fluxo de caixa, formado pelo valor do empréstimo e valor das parcelas periódicas, for determinada por meio da equivalência em juros simples.
- O valor dos juros e o valor da amortização, cuja soma é igual ao valor da prestação, não interferem no fluxo de pagamentos e no saldo devedor.
- A elaboração de planilha, com o objetivo de separar a prestação em parcelas de capital (amortização) e juros (remuneração do principal) tem significado, apenas, fisco-contábil.
- A cindibilidade do prazo e do montante é característica exclusiva da capitalização composta.
- A obtenção da prestação dos sistemas de amortização em que os juros são determinados pela incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior é idêntica à obtida pela equivalência em juros compostos.

## 1.6 FLUXO DA PESQUISA

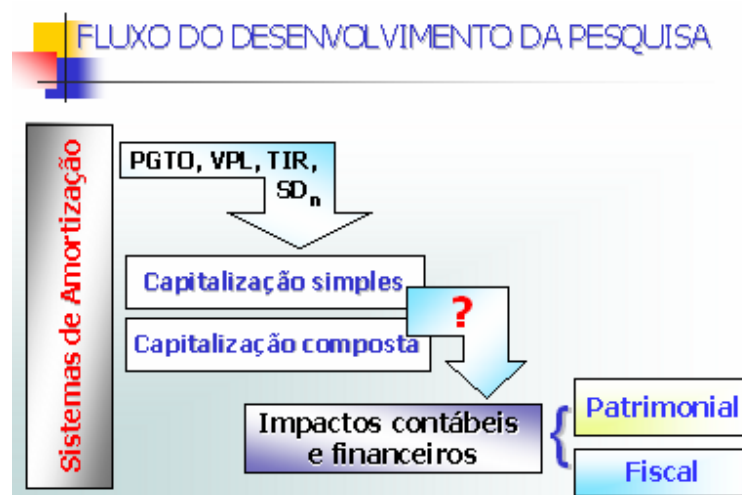


Figura 2: Fluxo do desenvolvimento da pesquisa  
 Fonte: Elaborado pelo autor

## JUSTIFICATIVAS

A investigação científica sobre o comportamento da capitalização dos juros nos sistemas de amortização de empréstimos mais usuais na realidade brasileira, e respectivos impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos, se justifica em razão de não existir em literatura estudos demonstrando efetivamente as duas preocupações desta pesquisa: qual o regime de capitalização de juros nesses sistemas: simples ou composto, e quais os impactos financeiros e patrimoniais da adoção de um ou outro regime de capitalização nos diversos sistemas de amortização utilizados na realidade brasileira.

Estabeleceu-se controvérsia relacionada ao regime de capitalização de juros quando dos questionamentos sobre a liquidação de empréstimos por meio de parcelas periódicas, não somente no sistema judiciário brasileiro, mas também entre escritores, professores e estudiosos da matemática financeira, bem como entre profissionais peritos e advogados<sup>2</sup>.

Em razão do aumento das demandas judiciais, com decisões contraditórias, mas geralmente contrárias à capitalização composta dos juros, as instituições de crédito, empresas de consultoria, escritórios de advocacia, peritos contábeis e assistentes técnicos, elaboram verdadeiros malabarismos para comprovar que a capitalização dos juros é simples ou composta, conforme a conveniência.

É de interesse público o esclarecimento da controvérsia, contribuindo para dar solução à polêmica que envolve o tema, as relações contratuais, os resultados sobre o patrimônio e os questionamentos judiciais. Será útil, também, no campo do ensino universitário, aos estudantes de graduação e pós-graduação em Administração, Economia, Ciências Contábeis, Engenharia ou Matemática, principalmente para aqueles que exercem atividades no mercado financeiro e no âmbito dos procedimentos judiciais.

Cabe enfatizar a relevância do tema no sistema financeiro brasileiro, porque as taxas de juros praticadas no Brasil são extremamente elevadas. A forma de capitalização pode ser irrelevante para o fluxo de caixa e para o patrimônio do tomador quando os patamares de juros são baixos, porquanto as diferenças de desembolsos nos diferentes regimes de capitalização de juros se tornam irrelevantes. No entanto, quando a taxa de juros mensal no país se iguala ou até ultrapassa a taxa anual praticada nas economias mais desenvolvidas, o regime de capitalização

---

<sup>2</sup> Sites: [www.stf.gov.br](http://www.stf.gov.br); [www.stj.gov.br](http://www.stj.gov.br); [www.trf1\(2 a 4\).gov.br](http://www.trf1(2 a 4).gov.br); [www.sindecon-esp.gov.br](http://www.sindecon-esp.gov.br); [www.cfc.gov.br](http://www.cfc.gov.br); [www.crcpr.org.br](http://www.crcpr.org.br)

dos juros cresce em importância. Por esse mesmo motivo, parca é a literatura internacional sobre o tema.

Outro fato a destacar é que desde 12 de setembro de 2006, por meio da Medida Provisória nº. 321 (BRASIL, 2006), o Sistema Financeiro da Habitação está autorizado a conceder financiamento imobiliário a taxas prefixadas, mesmo permanecendo os depósitos de poupança, principal *funding* do SFH, remunerados à taxa real pós-fixada de 0,5% ao mês, capitalização mensal, além da variação da TR. Essa autorização trouxe maior relevância ao estudo dos sistemas de amortização no Brasil, porquanto o mercado de crédito imobiliário tende a recrudescer.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Creswell (2007, p. 45-46), ao comentar sobre os objetivos, assegura que a revisão de literatura, além de compartilhar com o leitor os resultados de outros estudos relacionados, fornece uma estrutura para estabelecer a importância do estudo e um indicador para comparar os resultados.

A discussão sobre sistemas de amortização de empréstimos não pode furtar-se às questões de valor do dinheiro no tempo, fundamento da Matemática Financeira, que, conforme asseveram Brigham e Ehrhardt (2006, p. 284) “de todos os conceitos utilizados em finanças, nenhum é mais importante que o valor do dinheiro no tempo, também chamado análise do fluxo de caixa descontado (FCD)”.

Segundo Souza e Clemente (2000, p. 58), o ramo da matemática que trata da movimentação do dinheiro no tempo é a matemática financeira e as inúmeras formas com que os valores monetários distribuem-se ao longo de um horizonte de tempo são denominadas fluxos de caixa. Mathias e Gomes (2002, p. 22) registram que os problemas financeiros dependem basicamente do fluxo (entrada e saídas) de dinheiro no tempo, reconhecido como fluxo de caixa.

Assaf Neto (2001, p. 181) menciona que “um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que se estima ocorrer em determinado intervalo de tempo e podem ser verificados das mais variadas formas e tipos em termos de períodos de ocorrência, de periodicidade, de duração e de valores”.

Dessa forma, o estudo demanda conceituação de regimes de capitalização, taxa nominal e efetiva, proporcionalidade e equivalência de taxas, equivalência de capitais, fluxos de caixa uniformes ou não-uniformes, série com pagamentos ou recebimentos antecipados, postecipados e diferidos, valor presente, valor presente líquido, valor futuro e taxa efetiva de juros.

### 2.1 REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO DOS JUROS

Segundo Assaf Neto (2001, p. 18), “os critérios (regimes) de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo”. Souza e Clemente (2000, p. 12) ponderam que “o procedimento geralmente adotado para o cálculo da remuneração do capital imobilizado consiste em estabelecer uma taxa por unidade de

tempo. Daqui resultam duas formas fundamentais para a remuneração do capital: juro simples e juro composto, que são denominados regimes de capitalização”.

Sob o aspecto formal, Faro (1990, p. 4) destaca que “temos dois regimes básicos de capitalização: o contínuo e o descontínuo. Relativamente a este último, conforme os juros periodicamente rendam também juros, ou não, distinguimos os chamados regimes de capitalização descontínua a juros compostos e a juros simples, respectivamente”.

### **2.1.1 Capitalização contínua**

Assaf Neto (2001, p.22) define que “a capitalização contínua é um regime que se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos – caracteristicamente em intervalo de tempo infinitesimal – promovendo grande frequência de capitalização”. Portanto, são capitalizações que se formam continuamente e não somente ao final de cada período de capitalização, razão de encontrar enormes dificuldades em aplicações práticas.

A capitalização contínua, afirma Neves (1982, p. 26), “nada mais é que uma forma composta, sendo que a incorporação dos juros ao capital se realiza a intervalos infinitesimais de tempo”.

### **2.1.2 Capitalização descontínua**

Sobre a capitalização descontínua, Faro (1990, p. 8) pondera: “Suponha-se agora que seja convencionado que o juro só seja formado no fim de cada período (finito) de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Por esta convenção, (...) adotada no cálculo dos rendimentos das chamadas Cadernetas de Poupança, o capital passa a evoluir de uma maneira descontínua”. Portanto, nesse caso, os rendimentos ocorrem mensalmente; porém, somente num único momento do prazo da taxa (dia da abertura da poupança) e não distribuídamente pelo mês. A capitalização descontínua, considerando o comportamento dos juros, pelo fato de renderem juros ou não, pode ser dividida em capitalização simples e composta.

#### **2.1.2.1 Capitalização Simples**

Segundo Puccini (2006, p. 13), na capitalização simples “os juros de cada período são sempre calculados em função do capital inicial (principal) aplicado. Os juros não são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes”.

No regime de capitalização simples, segundo Kuhnen (2006, p. 3), “os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, não ocorrendo qualquer alteração da base de cálculo durante o período de cálculo dos juros. (...) O regime de capitalização simples representa, portanto, uma equação aritmética, sendo que o capital cresce de forma linear, seguindo uma reta; logo, é indiferente se os juros são pagos periodicamente ou no final do período total” [sic].

Nessa mesma linha, Francisco (1985, p. 12) define que “os juros são todos iguais, pois são calculados sobre o mesmo valor, que é o capital inicial. Podem ser retirados no final de cada mês ou no fim de 4 meses; o total será o mesmo” [sic], e Cavalheiro (1992, p. 6) que “quando os juros produzidos são pagos periodicamente ao capitalista, a capitalização se processa a juros simples” [sic].

Veras (1991, p. 60), por sua vez, entende que o regime de capitalização simples se caracteriza pela soma dos juros ao capital inicial uma única vez, no final do prazo contratado, e arremata alertando que “nada impede que os juros sejam calculados ou até colocados à disposição do investidor, parceladamente no decorrer desse prazo. Nesse caso, embora os juros sejam calculados periodicamente, em várias vezes, seu cálculo é feito sempre sobre o capital inicial e o montante será a soma do capital inicial com as várias parcelas de juros, o que equivale a uma única operação” [sic].

Os juros simples, conforme alerta Puccini (2006, p. 23), somente devem ser utilizados para a obtenção dos fluxos de caixa das operações financeiras, quando o problema implicar a adoção desse regime. Além disso, o referido autor (2006, p. 22) deixa bem claro que “o regime de juros simples é totalmente incorreto e que nunca deve ser utilizado como ferramenta de análise de fluxo de caixa”.

Ao longo dessa dissertação, para explicar os conceitos anteriormente expostos de forma literal, em linguagem matemática utiliza-se desenvolvimento e formulário comuns a muitos autores, a exemplo de Assaf Neto (2001), Faro (1990), Mathias e Gomes (2002), Puccini (2006), Souza e Clemente (2000), Vieira Sobrinho (2000), entre outros.

Assim, se houver mais de um período, o juro simples produzido em cada período é constante e proporcional ao capital que, aplicado a uma taxa unitária  $i$  (do inglês, *interest* = juro), ao final de  $n$  períodos, produzirá um juro simples ( $J$ ) igual ao produto do capital ( $C$ ) pela taxa unitária ( $i$ ) e pelo número de períodos de capitalização ( $n$ ), e um montante ( $M$ ) igual ao somatório desse juro com o capital inicial:

$$J_1 = C \times i \quad \text{[I]}$$

No final de 2 períodos, tem-se:

$$J_2 = C \times i \times 2$$

No final de n períodos, deduzindo-se a expressão genérica, obtém-se:

$$J_n = C \times i \times n \quad \text{[II]}$$

Como a soma do capital e seus respectivos juros simples é igual ao montante, obtém-se:

$$M_n = C + J_n$$

Utilizando a igualdade [II], tem-se:

$$M_n = C + C \times i \times n$$

$$M_n = C \times (1 + i \times n) \quad \text{ou} \quad VF = VP \times (1 + i \times n) \quad \text{[III]}$$

Isolando o capital (valor presente), obtém-se:

$$C = \frac{M_n}{(1 + i \times n)} \quad \text{ou} \quad VP = \frac{VF}{(1 + i \times n)} \quad \text{[IV]}$$

#### a) Classificação de taxas

Na capitalização simples, as taxas podem ser classificadas sob dois enfoques: em relação aos prazos a que se referem e em relação aos juros produzidos.

- Taxas proporcionais

Segundo Mathias e Gomes (2002, p. 27), ao se considerarem duas taxas de juros arbitrárias  $i_1$  e  $i_2$ , relacionadas aos períodos  $n_1$  e  $n_2$ , referidos à unidade comum de tempo das taxas, essas taxas se dizem proporcionais se houver a igualdade de quociente das taxas com o quociente dos respectivos períodos.

Como exemplo, determine-se a taxa anual proporcional a 40% ao semestre.

$$\frac{i_1}{40\%} = \frac{2}{1} \quad i_1 = 80\% \text{ ao ano}$$

- Taxas equivalentes

Conforme Assaf Neto (2001, p. 27), as taxas de juros simples são equivalentes quando produzem o mesmo juro ou montante linear de juros, se aplicadas sobre um mesmo capital e pelo mesmo prazo.

Como exemplo, pede-se responder à seguinte questão: o que é mais interessante para um investidor ao aplicar \$ 100.000,00, durante 1 ano, considerando as taxas de juros simples: (1) 40% ao semestre ou (2) 80 % ao ano?

$$J_1 = 100.000,00 \times 0,40 \times 2 = 80.000,00$$

$$J_2 = 100.000,00 \times 0,80 \times 1 = 80.000,00$$

No regime de juros simples, torna-se evidente que taxas proporcionais são igualmente equivalentes, sendo dispensável a classificação de taxas de juros como equivalentes ou proporcionais. Então, aplicar à taxa de juros simples de 40% ao semestre ou 80% ao ano é indiferente; pois, essas taxas são equivalentes no regime de juros simples.

b) Formas de apresentação da taxa

- Taxa percentual e unitária

Para Faro (1990, p. 3), “as taxas de juro costumam ser apresentadas sob uma das duas seguintes formas: percentual e unitária”. Considerando que simplifica as notações e os cálculos, a forma unitária, que corresponde à taxa centesimal dividida por 100, é adotada como padrão em todas as fórmulas da matemática financeira. Dessa forma, se a taxa percentual é 10%, a sua correspondente unitária será 0,10. Isto quer dizer que, se um capital de 100 produz 10 de juros, o capital de 1 produzirá 0,10.

### 2.1.2.2 Capitalização Composta

Segundo Puccini (2006, p. 15), na capitalização composta “os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros são capitalizados e, conseqüentemente, rendem juros”.



Lemes Júnior, Rigo e Cherobim (2005, p. 102) destacam que é importante conhecer o período de capitalização dos juros para se saber quando os juros serão incorporados ao principal, para também renderem no período seguinte. Puccini (1999, p. 16) ensina que “após cada período os juros são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez, a render juros. A esse processo dá-se o nome de capitalização de juros, e o período de tempo considerado é denominado período de capitalização”.

De acordo com Araújo (1993, p. 50) “no regime de capitalização composta, os juros do período se somam ao capital do período anterior acrescido dos juros, para gerar juros no período seguinte. Temos, então, um acréscimo de juros sobre juros”. Veras (1991, p. 60), por sua vez, entende que “no regime de capitalização composta é contratado o período de capitalização. Se o prazo total em que é feito o investimento tiver vários desses períodos, no final de cada período os juros serão capitalizados e o montante assim constituído passará a render juros durante o período seguinte”.

Casarotto Filho e Kopittke (1996, p. 19), ao se referirem a juros compostos, observam que “depois de cada período de capitalização, os juros são somados à dívida anterior, e passam a render juros no período seguinte. Tudo se passa como se a cada período fosse renovado o empréstimo, mas no valor do principal mais os juros relativos ao período anterior” [sic].

Para Vieira Sobrinho (2000, p. 34), “capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Neste regime de capitalização, o valor dos juros cresce em função do tempo”. Por isso, também a denominação de juros sobre juros, indicando que a caracterização se dá quando a taxa de juros incide sobre um valor que já contém juro.

Portanto, na capitalização composta, o juro produzido no final de cada período incorpora-se ao capital e, mesmo havendo saques parciais, passa a render juros nos períodos seguintes, até o resgate total: o capital e os juros incorporados, ou o saldo (capital remanescente), tornam-se o capital do período seguinte, e assim sucessivamente.

Dessa forma, se houver mais de um período, o juro produzido será somado ao capital (C) que, aplicado a uma taxa unitária (i), ao final de n períodos produzirá um montante (M) ou valor futuro (VF) igual ao produto do capital pelo fator de capitalização composta  $(1+i)^n$ , e um juro (J) igual à diferença entre esse montante e o capital inicial (C) ou valor presente (VP):

$$J_1 = C \times i \quad [\text{II}] \quad \rightarrow \text{idêntico ao juro simples}$$

Como a soma do capital e juros é igual ao montante, tem-se:

$$M_1 = C + J_1$$

Utilizando a igualdade [I] e fatorando o capital, tem-se:

$$M_1 = C \times (1 + i)$$

No final de 2 períodos, o montante será:

$$M_2 = M_1 \times (1 + i)$$

$$M_2 = C \times (1 + i) \times (1 + i)$$

$$M_2 = C \times (1 + i)^2$$

No final de n períodos, deduzindo-se a expressão genérica, obtém-se:

$$M_n = C \times (1 + i)^n \quad \text{ou} \quad VF = VP \times (1 + i)^n \quad [\text{V}]$$

Conseqüentemente, isolando C, tem-se o fator de capitalização composta de forma invertida:

$$C = \frac{M_n}{(1 + i)^n} \quad \text{ou} \quad VP = \frac{VF}{(1 + i)^n} \quad [\text{VI}]$$

Considerando que o juro é a diferença entre o montante e o capital, tem-se:

$$J_n = M_n - C$$

$$J_n = C \times (1 + i)^n - C$$

$$J_n = C \times [(1 + i)^n - 1] \quad [\text{VII}]$$

#### a) Classificação de taxas

Na capitalização composta, as taxas podem ser classificadas sob dois enfoques: em relação aos prazos a que se referem e conforme o fluxo de caixa, considerando a relação entre o valor resgatado ou pago e o valor aplicado ou tomado emprestado, respectivamente.

Segundo Vieira Sobrinho (2000, p. 186), pode-se caracterizar mais facilmente a classificação das taxas de juros em função do capital inicial tomado como base de cálculo:

*taxa nominal*: é a taxa calculada com base no valor nominal da aplicação ou do empréstimo, ou seja, com base no valor explicitado no título ou no contrato;

*taxa efetiva*: é a taxa calculada com base no valor efetivamente aplicado ou emprestado, ou seja, o valor colocado à disposição do banco ou do cliente na data da aplicação ou do contrato;

*taxa real*: é a taxa calculada com base no valor efetivamente aplicado ou emprestado, corrigido monetariamente pela inflação do período, contado desde o dia da aplicação ou do empréstimo até o dia de seu resgate ou vencimento.

- Taxas equivalentes

Segundo Hazzan e Pompeo (2001, p. 38), “duas taxas são equivalentes a juros compostos quando, aplicadas num mesmo capital e durante um mesmo prazo, produzem montantes iguais”.

Como exemplo, pede-se responder à seguinte questão: o que é mais interessante para um investidor ao aplicar \$ 100.000,00, durante um ano, considerando as taxas efetivas de juros: 40% ao semestre ( $i_2 = 0,40$ ) ou 96 % ao ano ( $i_1 = 0,96$ )?

$$M_1 = 100.000,00 \times (1+0,96) = 196.000,00$$

$$M_2 = 100.000,00 \times (1+0,40)^2 = 196.000,00$$

Portanto, conclui-se que 40% ao semestre são equivalentes a 96% ao ano. Procedendo-se à igualdade obtida, tem-se:

$$100.000,00 (1+0,96) = 100.000,00 \times (1+0,40)^2$$

$$(1+i_{aa})^1 = (1+i_{sem})^2 \quad \rightarrow \quad i_{aa} = (1+i_{sem})^2 - 1$$

Como se observa, ao determinar uma taxa equivalente em período superior ao período da taxa que se tem, deve-se capitalizar o número de períodos necessários para atingir o prazo da taxa que se tem. No exemplo, há que se capitalizar dois períodos para atingir um ano.

Conseqüentemente, isolando a taxa semestral, tem-se o fator de capitalização composta de forma invertida:

$$(1+i_{\text{sem}})^2 = (1+i_{\text{aa}})^1 \quad \longrightarrow \quad i_{\text{sem}} = (1+i_{\text{aa}})^{1/2} - 1$$

Constata-se, então, que ao calcular uma taxa equivalente em período inferior ao período da taxa que se tem, deve-se proceder ao processo inverso, ou seja, descapitalizar o número de períodos necessários para retornar ao prazo da taxa que se tem. No exemplo, há que se descapitalizar dois períodos para atingir um semestre.

Considerando  $i_q$  a taxa que se quer determinar e  $i_t$  a taxa que se tem;  $q$  o prazo da taxa que se quer determinar e  $t$  o prazo da taxa que se tem, com  $q$  e  $t$  obrigatoriamente na mesma unidade de tempo, Hazzan e Pompeo (2001, p. 40) descreveram a fórmula genérica para o cálculo da equivalência de taxas no regime de juros compostos, da seguinte forma:

$$(1+i_q)^t = (1+i_t)^q \quad \longrightarrow \quad i_q = (1+i_t)^{q/t} - 1 \quad [\text{VIII}]$$

Portanto, a taxa de 40% ao semestre é proporcional a 80% ao ano, porém equivalente a 96% ao ano. A diferença de 16 pontos percentuais entre essas taxas se dá em razão da incidência de juros sobre juros, ou seja, 40% sobre 40%.

Então, aplicar à taxa efetiva de 40% ao semestre, capitalização semestral, ou 96% ao ano, capitalização anual, é indiferente; pois, essas taxas são equivalentes no regime de juros compostos, porque produzem os mesmos juros, por conseguinte, montantes.

#### b) Formas de apresentação da taxa

No regime de juros compostos, a taxa de juro costuma ser apresentada sob as formas percentual ou unitária e efetiva ou nominal.

- Taxa percentual e unitária

Conforme apresentado no item (a), a taxa de juro pode ser apresentada sob a forma percentual e unitária. Considerando que simplifica as notações e os cálculos, a forma unitária, que corresponde à taxa percentual dividida por 100, é adotada como padrão em todas as fórmulas da matemática financeira.

- Taxa efetiva e nominal

Segundo Puccini (2006, p. 62), “taxa efetiva é a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização”. Essa é a taxa que deve ser utilizada nos cálculos das operações financeiras, ou qualquer outra taxa, desde que equivalente.

Tendo em vista a coincidência nas unidades de medida dos tempos da taxa de juros e dos períodos de capitalização, costuma-se não mencionar o período de capitalização. Portanto, quando o período de capitalização dos juros não é mencionado, subentende-se e está implícito que ele é coincidente com o período da taxa, razão da omissão. Por consequência, a taxa é efetiva e deve ser utilizada nos cálculos das operações financeiras, ou qualquer outra taxa, desde que equivalente.

Como exemplo: 12% ao ano, capitalização anual, ou  $(1,12)^{(1/12)} - 1 = 0,99489\%$  ao mês, capitalização mensal. Deve-se utilizar, então, para efeito de cálculo, a taxa efetiva de 12% ao ano, ou qualquer outra equivalente, por exemplo, 0,99489% ao mês; pois, os resultados serão rigorosamente os mesmos.

Segundo Souza e Clemente (2000, p. 49), “no regime de juros compostos, uma taxa é dita nominal quando o período a que a taxa se refere não coincidir com o período de capitalização (períodos em que são feitos os cálculos financeiros para a atualização do capital)”. Mathias e Gomes (1984, p. 136) ensinam que “temos uma taxa de juros nominal quando o prazo de formação e incorporação de juros ao capital inicial não coincide com aquele a que a taxa se refere. Neste caso, é comum adotar-se a convenção de que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal”.

Uma taxa de juros de 12% ao ano, capitalizados mensalmente, é uma taxa apresentada na forma nominal, porquanto se refere ao período de um ano, mas a capitalização dos juros é realizada mensalmente. Essa taxa é utilizada apenas para efeito de referência, jamais para cálculo. Para cálculos, a taxa tem que estar na forma efetiva, obrigatoriamente. Assim, a taxa por período de capitalização é de  $12\% \div 12 = 1\%$  ao mês, capitalizados mensalmente, ou  $(1,01)^{12} - 1 = 12,6825\%$  ao ano, capitalizados anualmente. Deve-se utilizar, então, para efeito de cálculo, a taxa efetiva de 1% ao mês, capitalização mensal, ou qualquer outra equivalente, por exemplo, 12,6825% ao ano, capitalização anual; pois, os resultados serão exatamente os mesmos.

### 2.1.3 Distinção entre os regimes de juros simples e composto

Brealey e Myers (1998, p. 41) enfatizam que “existe uma importante diferença entre **juro composto** e **juro simples**. Quando o dinheiro é investido a juro composto, os juros vencidos são reinvestidos para obter mais juros nos períodos seguintes. Em contrapartida, a oportunidade de ganhar juros sobre juros não existe num investimento que proporcione apenas juros simples”.

Nesse mesmo sentido, Pilão e Hummel (2004, p. 20) observam que “o que basicamente diferencia uma modalidade da outra é que no caso de juros simples teremos a incidência de um índice simples sobre o principal, enquanto nos juros compostos este mesmo índice, ou taxa, simples incidirá sobre o principal mais os juros vencidos”.

Ao fazer referência sobre os dois tipos de juros, Puccini (2006, p. 23) afirma que os juros simples devem ser utilizados apenas para a obtenção do fluxo de caixa das operações financeiras, quando o problema indicar a adoção desse regime, e deixa claro que “o regime de juros simples é totalmente incorreto e nunca deve ser utilizado como ferramenta de análise de fluxo de caixa”.

Esse mesmo autor (1999, p. 12) afirma que o regime de juros compostos, efetivamente, é o mais indicado para análise de fluxo de caixa. Entretanto, lembra que um mesmo fluxo de caixa pode ser analisado tanto no regime de juros simples como de juros compostos, resultando em taxas e valores presentes líquidos que variam de acordo com o regime de juros considerado.

Os problemas financeiros, alertam Brealey e Myers (1998, p. 41), envolvem, de forma geral, mais os juros compostos do que os juros simples, razão de os profissionais de finanças partirem sempre do princípio de que se está mencionando juros compostos, a não ser que se antecipe o contrário.

### 2.1.4 Aspectos legais

Com o argumento de que todas as legislações modernas vinham adotando normas severas para regular, impedir e reprimir os excessos praticados pela usura, e que o interesse da economia do país era que o capital financeiro não tivesse remuneração exagerada, impedindo o desenvolvimento das classes produtoras, a cobrança de juros foi regulada no Brasil, por meio do Decreto nº 22.626 (BRASIL, 1933), de 07 de abril de 1933, que, em seu artigo 4º, determina: “é proibido contar juros dos juros; esta proibição não compreende a acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta-corrente de ano a ano”, íntegra do artigo 253 do Código Comercial, Lei 556, de 25 de junho de 1850 (BRASIL, 1850).

A proibição da cobrança de juros foi ratificada pela Súmula da Jurisprudência Predominante do Supremo Tribunal Federal - STF, nº. 121 (BRASIL, 1963), aprovada em sessão plenária de 13 de dezembro 1963, com o seguinte teor: “é vedada a capitalização dos juros, ainda que expressamente convencionada”.

Entretanto, há controvérsias quanto à aplicabilidade do referido decreto às operações de crédito imobiliário, onde os sistemas de amortizações são largamente utilizados, cabendo destacar, neste particular, a Súmula da Jurisprudência Predominante do STF, nº. 596 (BRASIL, 1976), aprovada em sessão plenária de 15 de dezembro de 1976, com o seguinte teor: “as disposições do Decreto 22.626/33 não se aplicam às taxas de juros e aos outros encargos cobrados nas operações realizadas por instituições públicas ou privadas, que integram o sistema financeiro nacional”. Além disso, Rezende (2003, p. 74) observa que, segundo acórdão 285.138-CE, publicado em 05 de maio de 2003, “as instituições financeiras não estão submetidas à Lei de Usura, por força do disposto na Lei 4595/64, admitindo-se o que foi pactuado entre as partes, mediante contrato”.

A regra da proibição da cobrança de juros sobre juros permite exceções, quando pactuada e expressamente definida em legislação específica. Além da hipótese prevista na própria Lei de Usura - acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta-corrente de ano a ano - admite-se a capitalização de juros quando se trata de cédulas de crédito. Nesse sentido, a Súmula nº. 93 (BRASIL, 1993), aprovada na 2ª sessão de 27 de outubro de 1993 do Superior Tribunal de Justiça, preceitua: "a legislação sobre cédulas de crédito rural, comercial e industrial admite o pacto de capitalização de juros".

No dia 30 de março de 2000, a Medida Provisória nº. 1.963-17, reeditada por meio da Medida Provisória nº. 2.170-36 (BRASIL, 2001), de 23 de agosto de 2001, o Poder Executivo fez inserir em seu artigo 5º, o seguinte teor: “nas operações realizadas pelas instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional, é admissível a capitalização de juros com periodicidade inferior a um ano”.

Destaque-se, ainda, que o artigo 591 do Código Civil Brasileiro (BRASIL, 2002), instituído pela Lei nº. 10.406, de 10 de janeiro de 2002, admite a capitalização composta de juros: “destinando-se o mútuo a fins econômicos, presumem-se devidos juros, os quais, sob pena de redução, não poderão exceder a taxa a que se refere o art. 406, permitida a capitalização anual”.

Essa medida, entretanto, não atinge a impossibilidade da capitalização dos juros após iniciada ação contra o devedor, conforme preceitua o artigo 253 do Código Comercial "Depois que em juízo se intenta ação contra o devedor, não pode ter lugar a acumulação de capital e juros".

No entanto, a Corte Especial do Tribunal Regional Federal da 4ª Região, em 02 de agosto de 2004, decidiu que é inconstitucional a cobrança de juros sobre juros nas operações realizadas pelas instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional, com periodicidade inferior a um ano (BRASIL, 2004).

Com relação aos valores pagos a prestações periódicas, o Código Civil, em seu artigo 354, preceitua a forma de direcionamento, priorizando o pagamento dos juros devidos à amortização: “havendo capital e juros, o pagamento imputar-se-á primeiro nos juros vencidos, e depois no capital, salvo estipulação em contrário, ou se o credor passar a quitação por conta do capital”.

Segundo Rezende, (2003, p. 23) “tecnicamente só existe uma única forma de ocorrer a cobrança de juros dos juros, o denominado anatocismo, e esta forma consiste em incorporá-los ao saldo devedor, passando estes a fazer parte do capital e, por conseguinte, a render juros nos períodos subseqüentes, o que não ocorre com os sistemas de amortização” [sic].

Nogueira (2002, p. 38) destaca que “na disciplina da matemática aplicada na área financeira, a capitalização de juro significa a provocação dos mesmos efeitos de juros sobre juros por via de juro composto, sendo tal prática, em direito, chamada de anatocismo, palavra universal de origem grega, designativa de um dos sinônimos de juro composto” [sic].

O conceito lexicográfico de anatocismo é apresentado por Ferreira (2001), no Dicionário Aurélio – Século XXI, como “anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada”; Houaiss (2001), no Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, como “anatocismo provém do latim *anatocismus*, de origem grega, e significa usura, prêmio composto ou capitalizado”; Cunha (1997), no Dicionário Etimológico, como “anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada. Do latim *anatocismus*, derivado do grego *anatokismós*” e Rudge (2006), na Enciclopédia de Finanças, como “anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada. O mesmo que juro composto, juro capitalizado ou juro sobre juro”. De Plácido e Silva (2002), no Vocabulário Jurídico, ensina: “anatocismo é vocábulo que nos vem do latim *anatocismus*, de origem grega, significando usura, prêmio composto ou capitalização. Desse modo, vem significar a contagem ou cobrança de juros sobre juros” e Naufel (2002), no



Novo Dicionário Jurídico Brasileiro, que “anatocismo é a capitalização de juros, vencendo novos juros. É a contagem de juros sobre juros já produzidos pelo capital empregado”.

Entretanto, em artigo específico sobre a capitalização dos juros e o conceito de anatocismo, Vieira Sobrinho (2004, p. 2) conclui que “anatocismo nada tem a ver com o critério de formação dos juros a serem pagos (ou recebidos) numa determinada data; ele consiste na cobrança de juros sobre juros vencidos e não pagos, exatamente como foi conceituado no Novo Dicionário Brasileiro” [sic]. O referido autor arremata que, entendido o anatocismo dessa forma, somente existe num sistema de amortização de empréstimos se as prestações não forem liquidadas nos respectivos vencimentos e o credor cobrar juros sobre os juros vencidos e não pagos.

Nessa mesma linha, no Dicionário de Administração e Finanças, Sandroni (1996, p. 19) entende que “anatocismo é o termo que designa o pagamento de juros sobre juros, isto é, a capitalização de juros que foram acumulados, por não terem sido liquidados no vencimento respectivo”; Nunes (1979), no Dicionário de Tecnologia Jurídica, afirma que “anatocismo é capitalização dos juros de uma soma de dinheiro, vencendo novos juros. Acumulação de juros vencidos ao capital, ou contagem destes sobre os juros vencidos e não pagos”; Lacombe (2004, p.19), no Dicionário de Administração, defende: “anatocismo é o pagamento de juros sobre juros, isto é, a capitalização de juros segundo o critério de juros compostos, definidos pela fórmula  $(1+i)^n$ . Os juros não pagos no final do período são capitalizados e sobre eles incidem novos juros”; Tenório e Maia (1999), no Dicionário de Direito Tributário, escrevem que “anatocismo é a capitalização de juros de uma soma em dinheiro que passa a vencer juros sucessivamente, ou seja, a contagem de juros sobre juros. Os juros vencidos são incorporados ao capital inicial e este, aumentado, passa a vencer novos juros e assim sucessivamente” e Michaelis (2000), no Moderno Dicionário da Língua Portuguesa, explica: “anatocismo é o juro cobrado sobre juros vencidos não pagos e que são tidos por incorporados ao capital desde o dia do vencimento”.

Portanto, fica clara a divergência entre os estudiosos da matéria, com relação à conceituação de anatocismo. Nessa dissertação, considerando que na capitalização composta, no caso de empréstimo, a taxa de juro sempre incide sobre juros devidos e não pagos (vencidos), e no caso de aplicação, sobre juros auferidos e não sacados (vencidos), entende-se anatocismo como a cobrança de juros sobre juros vencidos e não pagos, característica de capitalização composta.

Entretanto, é oportuno esclarecer que **juros vencidos e não pagos**, intrínsecos à capitalização composta, são distintos de **juros exigidos, de acordo com o sistema de amortização estabelecido em contrato, e não pagos**, constituindo em **amortização negativa**, de tal forma que o saldo devedor, em vez de diminuir, será acrescido do juro exigido e não pago, passando a produzir novos juros nos períodos seguintes.

### 2.1.5 Aspectos contábeis

Segundo Iudícibus (2004, p. 89), a contabilidade pode ser conceituada, pelo menos, sob três ângulos: (1) sob o acompanhamento das variações quantitativas e qualitativas do patrimônio; (2) sob o ponto de vista do usuário da informação contábil e (3) sob a visão econômica, que observa a contabilidade como a disciplina que permite avaliar os recursos escassos colocados à disposição das entidades e como inferir sobre a eficiência e eficácia com que esses recursos foram manipulados.

Notadamente, o acompanhamento da variação do patrimônio constitui o cerne da Contabilidade; pois, permite verificar como e quanto alterou a riqueza da entidade. Para esse autor (2004, p. 91), “uma das principais finalidades da Contabilidade é a avaliação de desempenho de períodos passados; outra, muito importante, é fornecer informações hábeis para a tomada de decisões gerenciais”.

Nesse contexto de prover informações hábeis, especial atenção deve ser direcionada à evidenciação: *disclosure*. Para o entendimento do termo, remeta-se à língua inglesa, em que muitas palavras têm o prefixo latino *dis*, tornando opostos ou negativos adjetivos, verbos e substantivos, a exemplo de *dishonest* (não honesto), *disobey* (não obedecer), *disagree* (não concordar), e *closure* – com a conotação de clausura, fechamento.

Assim, *disclosure* pode ser entendido como o oposto de clausura, significando a abertura da empresa, por meio da divulgação de informações, garantindo a transparência corporativa diante dos usuários. Num sentido mais abrangente, quer dizer, simplesmente, transmissão de informações. Segundo Ferreira (2006), Dicionário Aurélio – Século XXI, **evidenciar** significa tornar evidente, mostrar com clareza, comprovar; e **evidente** aquilo que não oferece dúvida; que se compreende prontamente, dispensando demonstração; claro, manifesto, patente.

Segundo Niyama e Gomes (1996, p. 65), além de estar diretamente ligado aos objetivos da contabilidade, *disclosure* “diz respeito à quantidade das informações de caráter financeiro e

econômico, (...) entendidas como sendo aquelas que de alguma forma influenciam na tomada de decisões, envolvendo a entidade e o acompanhamento da evolução patrimonial”.

A contabilidade possui papel central como fonte de informação. Lopes e Martins (2005, p. 76) afirmam que “a informação contábil pode ser usada para a avaliação da qualidade dos ativos, para a avaliação da *performance* de agentes investidos pelos acionistas, para controle do comportamento dos gestores após a concessão de créditos”.

O nível de divulgação também depende do padrão considerado mais desejável e três conceitos são geralmente propostos, segundo Hendriksen e Breda (1999, p. 515), conforme trabalhados no Quadro 1:

CONCEITOS	CARACTERÍSTICAS
Divulgação Adequada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pressupõe um volume mínimo de divulgação compatível com o objetivo negativo de evitar que as demonstrações sejam enganadoras.</li> </ul>
Divulgação Justa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subtende um objetivo ético de tratamento equitativo de todos os leitores em potencial.</li> </ul>
Divulgação Completa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pressupõe a apresentação de toda informação relevante.</li> </ul>

Quadro 1: Níveis de divulgação de informações financeiras

Fonte: Informações trabalhadas pelo autor, com base em Hendriksen e Breda.

As informações contábeis podem ser evidenciadas por meio das demonstrações contábeis, informações entre parênteses, notas explicativas ou de rodapé, quadros suplementares, pareceres dos auditores e relatórios dos administradores. As demonstrações contábeis são aquelas que proporcionam a maior quantidade de evidenciação, além de conter informações sobre a situação patrimonial, econômica e financeira da empresa.

Considerando todos esses aspectos, Iudícibus (2004, p. 129) assegura que “a evidenciação é um compromisso inalienável da Contabilidade com seus usuários e com os próprios objetivos. As formas de evidenciação podem variar, mas a essência sempre é a mesma: apresentar informação quantitativa e qualitativa de maneira ordenada, a fim de propiciar uma base adequada para o usuário”.

No caso do registro das operações de crédito e de aplicações financeiras é mister registrar os montantes emprestados e aplicados, bem como evidenciar o impacto dos pagamentos e recebimentos dos juros decorrentes. Portanto, as formas de capitalização dos juros e a evolução do capital devem ser claramente especificadas.

Quando um capital  $C$  é emprestado a uma taxa  $i$  por período, para liquidação, após  $n$  períodos, em um único pagamento ou em  $n$  pagamentos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , ao final de 1, 2, 3, ...,  $n$  períodos, podem-se utilizar os critérios de juros simples ou compostos, não somente para a obtenção do montante, mas também dos pagamentos periódicos, o que impactará na mensuração das obrigações e direitos das empresas, conseqüentemente, no patrimônio.

Seguindo os dispositivos legais já consagrados na legislação brasileira, o Código Civil prevê duas espécies de empréstimos: comodato e mútuo. Em seu artigo 579, define que “comodato é o empréstimo gratuito de coisas não fungíveis. Perfaz-se com a tradição do objeto” e em seu artigo 586, que “mútuo é o empréstimo de coisas fungíveis. O mutuário é obrigado a restituir ao mutuante o que dele recebeu em coisa do mesmo gênero, qualidade e quantidade” e complementa em seu artigo 591 “destinando-se o mútuo a fins econômicos, presumem-se devidos os juros, os quais, sob pena de redução, não poderão exceder a taxa a que se refere o artigo 406, permitida a capitalização anual”.

Portanto, o mútuo é um empréstimo de coisas fungíveis, para consumo durante certo prazo, como é o caso do dinheiro, no qual o mutuário (devedor) é obrigado a restituir ao mutuante (credor) em coisa do mesmo gênero, e equivalente em quantidade e qualidade. Dessa forma, pode-se inferir que coisas não-fungíveis são aquelas que não podem ser substituídas por outras do mesmo gênero, qualidade e quantidade, como é o caso de uma obra de arte, por exemplo.

Normalmente, esses empréstimos são representados por contratos, em que se estabelecem obrigações recíprocas às partes e definem-se o objeto, as responsabilidades, os juros, a forma de pagamento, as periodicidades, as garantias, etc. Como se observa, um empréstimo envolve duas pessoas: credor (mutuante) que fornece o recurso, contabilizando como direitos a receber, e devedor (mutuário), que se utiliza desse recurso em sua estrutura patrimonial, registrando como obrigações a pagar. Há um fenômeno patrimonial; pois, o fato contábil pode afetar a riqueza.

Tendo em vista que o contrato de empréstimo expressa as condições negociadas, espera-se destacada a forma de capitalização dos juros, de modo a permitir a mensuração e registro dos impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa do mutuante e do mutuário.

Iudícibus, Martins e Gelbcke (2007, p. 246) asseveram que a contabilidade, por meio das demonstrações contábeis, deve refletir as condições contratuais que afetam sua análise e interpretação, explicitando adequadamente no balanço e respectiva nota explicativa.

Existem diversas formas de liquidar um empréstimo: pagando-se os juros e o principal no vencimento do contrato; pagando-se periodicamente juros no final de cada período e o principal no vencimento; pagando-se periodicamente juros e parte do principal, no final de cada período; pagando-se periodicamente juros no início de cada período, e parte do principal no final de cada período, etc.

Iudícibus, Martins e Gelbcke (2007, p. 248) ensinam que “os juros devem ter o mesmo tratamento das variações monetárias quanto à sua contrapartida, ou seja, são contabilizados como despesas financeiras, exceto quando incorridos durante o período pré-operacional”.

De modo geral, os empréstimos de médio e longo prazo são apresentados em planilhas, em que se visualizam os elementos componentes de um sistema de amortização, indicando em cada pagamento, a parte que se destina aos juros e à amortização da dívida. Tal separação decorre do fato de o tratamento contábil ser diferenciado, uma vez que os juros produzem efeito fiscal, pois são contabilizados como despesa, influenciando diretamente no processo de determinação da base de cálculo do Imposto de Renda e da Contribuição Social sobre o lucro, e a decisão de investimentos.

Segundo Hermann Jr (1956, p.278) “quando os fatos contábeis atingem simultaneamente contas elementares e derivadas, modifica-se o capital-valor para mais ou para menos. Esses fatos denominam-se modificativos e são classificados em aumentativos e diminutivos, segundo o efeito positivo ou negativo que produzem sobre o capital-valor”.

Quando há amortização de empréstimo a juros compostos, se ocorrer decisão judicial para recálculo da dívida a juros simples, haverá uma diferença, que afetará o patrimônio líquido de ambas as partes, gerando ao mesmo tempo um fato modificativo aumentativo para o devedor e um fato modificativo diminutivo para o credor.

Ao argumentarem sobre a capitalização dos juros em empréstimos liquidados por meio dos critérios da Tabela Price, Pires e Negra (2005, p. 47) afirmam que “em virtude de a exposição utilizar o instrumento matemático, a contabilidade deve contribuir para que os conceitos matemáticos sejam observados com o rigor científico da especialidade que a instrumentaliza, mediante a utilização de alguma teoria contábil” [sic].

De acordo com a fundamentação científica da Teoria da Contabilidade, Sá (1999, p.171) afirma que “os fenômenos patrimoniais possuem suas causas e efeitos, ocorrendo em condições específicas de qualidade de elementos, de quantidade deles, e em tempos e espaços determinados.

Causa, Efeito, Qualidade, Quantidade, Tempo e Espaço são realidades dimensionais que concorrem para o fenômeno patrimonial”. Considerando os objetivos do presente trabalho ao analisar sistemas de amortização de empréstimos, pode-se identificar, na essência de cada fenômeno patrimonial, a ocorrência de todos esses fatores dimensionais, de forma combinada:

- Há uma causa: a assinatura do contrato de empréstimo;
- Há um efeito: o registro do direito e da obrigação;
- Há uma qualidade: a forma jurídica do fenômeno;
- Há uma quantidade: o valor do empréstimo e das parcelas;
- Há um tempo: a época do acontecimento de cada fenômeno;
- Há um espaço: local (endereço) da contratação.

As relações lógicas dimensionais dos fenômenos patrimoniais verificam-se na elaboração e interpretação do quadro de amortização dos sistemas, com a indicação do saldo devedor, da parcela e de seus dois componentes: a amortização do principal, de forma periódica – quantidade, e os juros devidos por período transcorrido – tempo, calculados sobre o saldo devedor do período anterior.

## 2.2 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Muitas vezes se quer renegociar o pagamento de uma dívida, prorrogar, antecipar, parcelar ou saber se uma forma de pagamento é mais atrativa que outra. Para isso, há que se considerar que **o dinheiro tem valor no tempo**, raciocínio fundamental da Matemática Financeira.

Keynes rompeu com a teoria clássica ao considerar explicitamente que a demanda por moeda depende da taxa de juros. Ao examinar por que existe o que se denomina preferência pela liquidez, o referido autor (1992, p. 138) destacou a necessidade de se fazer distinção entre o uso da moeda em transações comerciais correntes e como reserva de riqueza, e concluiu: “No que concerne ao primeiro destes usos, é evidente que vale a pena sacrificar, até certo ponto, alguma quantidade de juro pela conveniência da liquidez. Porém, dado que a taxa de juro nunca é negativa, por que alguém preferiria guardar sua riqueza de forma que renda pouco, ou nenhum juro, a conservá-la de outra que renda algum?”.

Sendo assim, como sempre há uma taxa de juros para recompensar o sacrifício de postergar uma entrada de caixa, permitindo a formação de poupança e investimentos na economia, \$ 10.000,00 hoje não são iguais a \$ 10.000,00 em qualquer outra data futura; porquanto, um valor no futuro sempre contém juros e quando se transporta a valor presente, desembutando esses juros, tem-se um valor menor que o valor de hoje, e vice-versa.

Em sua Teoria da Preferência pela Liquidez, Keynes (1992, p. 139) distinguiu três categorias, definidas conforme os motivos que as governam:

- (i) o motivo transação, isto é, a necessidade de moeda para as operações correntes de trocas pessoais e comerciais;
- (ii) o motivo precaução, ou seja, o desejo de segurança com relação ao equivalente do valor monetário futuro de certa parte dos recursos totais;
- (iii) o motivo especulação, isto é, o propósito de obter lucros por saber melhor que o mercado o que trará o futuro.

É importante observar que essa assertiva teórica a respeito da intenção dos agentes econômicos pode, em regimes inflacionários, ter um resultado que venha a contrariar as expectativas desses agentes. Segundo Rangel (1980, p. 113), “o fato não previsto, nem desejado, nem buscado, de uma *inflação institucionalizada*, introduziria na operação do sistema econômico um parâmetro cuja importância não pode ser exagerada, a saber: *taxa negativa de juros reais*”.

Portanto, na vigência de regimes inflacionários, mais significativos se tornam os juros; porquanto, conscientemente, ninguém guardaria sua riqueza de forma a obter perda de poder aquisitivo, a aplicá-la de outra forma que tenha algum rendimento.

Puccini (2006, p. 3) observa que a Matemática Financeira está diretamente ligada ao valor do dinheiro no tempo, que está interligado à existência de taxa de juros, e preceitua os mandamentos fundamentais dessa ciência: (a) valores de uma mesma data são grandezas que podem ser comparadas e somadas algebricamente; (b) valores de datas diferentes são grandezas que só podem ser comparadas e somadas algebricamente após serem movimentadas para uma mesma data, com a correta aplicação de uma taxa de juros.

De acordo com Mathias e Gomes (2002, p. 155) essa data comum, que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes, é denominada data focal, que também pode ser denominada de data de avaliação ou de referência.

Para Juer (1985, p. 21), o valor do dinheiro no tempo foi o principal conceito que orientou todo seu raciocínio ao longo do desenvolvimento de seu trabalho, e observa que “empréstimos ou investimentos realizados no presente terão seu valor aumentado no futuro. Inversamente, valores disponíveis no futuro, se considerados ou avaliados no presente, terão seus valores reduzidos”.

Damodaran (2005, p. 526) enriquece a discussão sobre o valor do dinheiro no tempo, ao especificar três razões que fazem um fluxo de caixa no futuro valer menos do que um fluxo de caixa idêntico no presente:

- 1) As pessoas *preferem consumo presente a consumo futuro*. É necessário oferecer mais às pessoas no futuro para que elas abram mão do consumo presente;
- 2) Quando há *inflação monetária*, o valor da moeda se reduz com o tempo. Quanto maior a inflação, maior a diferença entre o valor de um dólar hoje e o de um dólar no futuro;
- 3) Qualquer *incerteza (risco)* associada ao fluxo de caixa no futuro reduz seu valor.

Souza e Clemente (2000, p. 9) observam que, mesmo em economias não inflacionárias, a preferência pela liquidez persiste, e tecem comentários com relação às três razões identificadas por Keynes: transação - dinheiro em caixa para fazer face às necessidades rotineiras, precaução - dinheiro em caixa visando cobrir as possíveis necessidades de um futuro incerto, e especulação - dinheiro em caixa para realizar novos negócios se estes se apresentarem.

Weston e Brigham (2000, p. 202 e 209) ensinam que capitalização é o processo de passar os valores de hoje para valores futuros e o seu oposto, o processo de encontrar valores presentes, é chamado de desconto. Nessa mesma linha, Brigham e Ehrhardt (2006, p. 322) afirmam que capitalização é o processo que determina o valor futuro de fluxos de caixa, e o desconto é o processo de encontrar o valor presente de um fluxo de caixa futuro ou de uma série de fluxos de caixa, representando a recíproca, ou o inverso, da capitalização.

Ao invocar a Teoria da Preferência pela Liquidez, Lemes Júnior, Rigo e Cherobim (2005, p. 91), observam: “O dinheiro recebido hoje tem mais valor do que a mesma quantia de dinheiro recebida amanhã. Mesmo que não exista inflação, que os preços permaneçam constantes, que as necessidades das pessoas não mudem, a possibilidade de comprar um produto hoje, fazer um investimento hoje, desfrutar um serviço hoje, vale mais do que a mesma possibilidade amanhã”.



Conclui-se, por consequência, que **somar ou subtrair valores em datas diferentes, embora possa ter sentido contábil e legal, não tem qualquer fundamento financeiro, em razão do valor do dinheiro no tempo**. Mathias e Gomes (2002, p. 156) ensinam que “a equação de valor permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, para uma mesma data focal, desde que seja fixada certa taxa de juros. Em outras palavras, a equação de valor pode ser obtida igualando-se em uma data focal as somas dos valores atuais e/ou montantes dos compromissos que formam a alternativa em análise”.

Para se comparar alternativas de fluxos de caixa, com valores exigidos em datas diferentes, primeiramente define-se uma data comum, chamada data focal, para depois proceder à equivalência, considerando uma determinada taxa de juros e o seguinte argumento, conforme Mathias e Gomes (2002, p. 157) “dois ou mais capitais, com datas de vencimento determinadas, são equivalentes quando, levados para uma mesma data focal à mesma taxa de juros, tiverem valores iguais”. Os referidos autores observam que o tipo de desconto deve ser especificado, pois o resultado da operação de desconto depende da modalidade adotada, se comercial (ou por fora) ou racional (ou por dentro).

Vieira Sobrinho (2000, p. 31) define desconto comercial como aquele obtido por meio da multiplicação do valor de resgate do título pela taxa de desconto, e este produto pelo prazo a decorrer até o vencimento do título; e o desconto racional como o resultado da multiplicação do valor atual pela taxa de desconto e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título.

### 2.2.1 Equivalência de capitais em juros simples

Assaf Neto (2001, p. 31) enfatiza que “na questão da equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser desmembrados (fracionados) sob pena de alterar os resultados”. Entretanto, o referido autor (2001, p. 33) conclui que “na prática, a definição da data focal em problemas de substituição de pagamentos no regime de juros simples deve ser decidida naturalmente pelas partes, não se verificando um posicionamento técnico definitivo da Matemática Financeira” [sic].

Ratificando a questão do fracionamento de prazo, Faro (1990, p. 28) constata que “colocando-se o montante de um certo capital  $C$ , calculado à taxa  $i$  e para um prazo  $n_1$ , à mesma taxa  $i$  e por um prazo  $n_2$ , o montante final será diferente do calculado considerando-se o capital  $C$  colocado, ainda à taxa  $i$ , durante o prazo total  $n = n_1 + n_2$ ”.

Mathias e Gomes (1984, p. 94) observam que as equações de valor não são equivalentes e os seus resultados numéricos são diferentes, devido á forma de capitalização adotada no regime de juros simples, em que não se pode fracionar o prazo de aplicação. Ou seja, “a formação do montante e do valor atual não é cindível em valores intermediários, uma vez que o juro é admitido como sendo formado no fim do período de aplicação”. Entretanto, concluem que “a solução deste problema, no regime de juros simples, depende da data focal considerada” [sic].

Ao tecer comentários sobre a época de referência para a qual os valores são considerados equivalentes, Neves (1982, p. 34) faz a seguinte afirmação: “Como na maioria dos problemas a época de referência não está claramente determinada, deve-se evitar o uso do conceito de equivalência na solução de problemas a juros simples, a menos que esteja bem definido” [sic].

Da mesma forma, Faro (1989, p. 106) assegura que na capitalização simples “como o prazo de aplicação é não cindível, capitais equivalentes em determinada data não serão equivalentes em outra data”. Entretanto, o referido autor (2002, p. 29) observa que “por força da característica da incindibilidade do prazo, a equivalência financeira entre conjuntos de capitais fica, no regime de juros simples, dependente da data fixada para a comparação” e conclui (2002, p. 31) que, embora possa parecer mais adequado tomar como data focal aquela em que se efetua a proposta, não há uma resposta definida; pois, sob o enfoque do devedor, a data a ser definida será aquela que minimiza o valor do pagamento e para o credor a que maximiza [sic].

Francisco (1985, p. 81) contrapõe o argumento de que a data focal deve ser definida entre as partes e deixa claro que “ao estudar juros e descontos simples, viu-se que dois ou mais capitais, realizáveis em datas distintas, são equivalentes se, na época, seus valores atuais (data zero) forem iguais”.

Constata-se, então, que na capitalização simples pairam dúvidas sobre a definição da data focal a se adotar, por trazer resultados diversos, justificando a investigação expressa no primeiro objetivo específico desse trabalho.

### **2.2.2 Equivalência de capitais em juros compostos**

Na capitalização composta, conforme Vieira Sobrinho (1998, p. 111), “provado que dois ou mais capitais são equivalentes em determinado ponto de referência, para determinada taxa, esses mesmos capitais serão equivalentes em qualquer outro ponto tomado como referência, considerada a mesma taxa”.

Da mesma forma, Assaf Neto (2001, p. 190) enfatiza “registre-se, uma vez mais, que a equivalência financeira no regime de juros compostos, para dada taxa de juros, pode ser verificada em qualquer momento tomado como referência (data focal)”.

De acordo com Puccini (2006, p. 152), “se os fluxos de caixa tiverem o mesmo valor presente, a uma determinada taxa de juros, então, seus valores futuros após  $n$  períodos, obtidos com essa mesma taxa de juros, são necessariamente iguais. Dessa forma, a equivalência de fluxos de caixa não precisa obrigatoriamente ser verificada no ponto zero da escala de tempo. Ela pode ser verificada no final de qualquer período  $n$ ”.

Mathias e Gomes (2002, p. 180) definem que “dois ou mais valores nominais, equivalentes sob o critério juros compostos em uma certa data focal, são equivalentes em qualquer data focal”.

Faro (1989, p. 106), ao fazer um paralelo sobre capitais equivalentes no regime de juros simples e juros compostos, observa:

- 1 – No caso do regime de juros simples, como o prazo de aplicação é não cindível, capitais equivalentes em determinada data não serão equivalentes em outra data.
- 2 – No caso do regime de juros compostos, quando se considerar desconto por dentro, como o prazo de aplicação pode ser fracionado, capitais equivalentes em determinada data serão também equivalentes em qualquer outra data.

Francisco (1985, p. 81), ao ensinar equivalência pelo sistema de capitalização composta (juros compostos e desconto composto real), destaca que a equivalência dos capitais diferidos pode ser feita não somente na data zero (valor atual), como na capitalização simples, mas em qualquer outra data, pois os juros compostos são equivalentes aos descontos compostos.

Como se pôde perceber, quando a equivalência se processa no regime de juros compostos, os conceitos dos vários autores convergem.

Portanto, tecnicamente, a equivalência financeira entre valores, no regime de juros compostos, independe da data focal escolhida; pois, havendo equivalência em determinada data focal, essa equivalência ocorrerá em qualquer outra data, como restou matematicamente comprovado no capítulo 4.1.2. Pode-se concluir, então, que **na capitalização composta, a equivalência poderá ser efetivada em qualquer data focal.**

### 2.2.3 Equivalência de fluxos de caixa

Utiliza-se o mesmo raciocínio financeiro da equivalência de capitais, quando se envolvem valores monetários em épocas distintas no tempo. Segundo Puccini (2006, p. 153), “dois ou mais fluxos de caixa são equivalentes, a uma determinada taxa de juros, se seus valores presentes (PV), calculados com essa mesma taxa de juros, forem iguais”.

#### a) Fluxos uniformes ou homogêneos

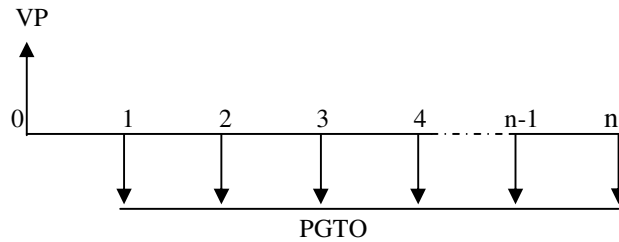
Quando um empréstimo ou financiamento é amortizado periodicamente, existe uma indiscutível e maciça preferência para que as parcelas sejam constantes, por uma questão de administração do fluxo de caixa, tanto do credor, como do tomador do empréstimo.

Ao escrever sobre a liquidação de empréstimos e financiamentos, Assaf Neto (2001, p. 233) destaca que o crédito direto ao consumidor – CDC é uma operação destinada a financiar a aquisição de bens e serviços, e esse financiamento é geralmente amortizado em prestações periódicas, iguais e sucessivas, seguindo a estrutura do modelo-padrão de fluxo de caixa.

O modelo-padrão (Assaf Neto, 2001, p. 182) ou modelo-básico (Mathias e Gomes, 2002, p. 207) ou série uniforme de valores monetários postecipados (Puccini, 2006, p. 87) de um fluxo de caixa é caracterizado quando uma sucessão de pagamentos ou recebimentos apresenta, ao mesmo tempo, as seguintes características:

- O primeiro pagamento ocorre no final do primeiro período, o segundo pagamento no final do segundo período e assim sucessivamente. O fluxo ou a série é denominado postecipado ou por termos vencidos.
- O prazo total do fluxo caixa é previamente conhecido; por conseguinte, o número de pagamentos é finito.
- Os valores dos pagamentos são constantes.
- Os intervalos entre os pagamentos são iguais, ou seja, o lapso de tempo entre um pagamento e o pagamento anterior ou posterior é constante, e esses pagamentos são ditos periódicos.

Graficamente, o fluxo de caixa modelo-padrão ou básico pode ser assim representado:



O valor presente (VP) desse fluxo de caixa (PGTO), para uma taxa ( $i$ ) efetiva definida em período igual ao período do fluxo, é determinado pelo somatório dos valores presentes (data focal zero) de cada um de seus valores:

$$VP = PGTO(1+i)^{-1} + PGTO(1+i)^{-2} + \dots + PGTO(1+i)^{n-1} + PGTO(1+i)^n$$

Colocando-se em evidência PGTO, comum a todos os fatores, tem-se:

$$VP = PGTO \times \left[ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \right]$$

O fato de as prestações serem constantes permite a obtenção de fórmulas simplificadas para o desconto e a capitalização dessas parcelas; pois, a soma dessas parcelas constitui-se na soma dos termos de uma progressão geométrica. Observa-se que entre os colchetes tem-se a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica limitada, cujo primeiro termo ( $a_1$ ) e a razão ( $q$ ) são iguais a  $(1+i)^{-1}$ .

$$\text{Como a Soma}_{PG} = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ obtém-se: } SD_0 = PGTO \times (1+i)^{-1} \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

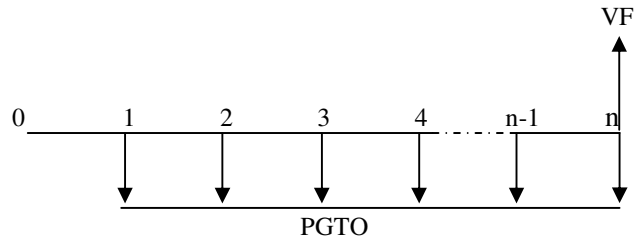
Fazendo-se as devidas simplificações e fatorações, obtém-se a expressão para o cálculo do valor presente do fluxo de caixa modelo-padrão ou básico:

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \quad \text{[IX]}$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor presente de forma invertida:

$$PGTO = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \quad [\text{X}]$$

Graficamente, o fluxo de caixa modelo-padrão ou básico pode ser também representado em função do valor futuro:



O valor futuro (VF) desse fluxo de caixa (PGTO), para uma taxa (i) efetiva definida em período igual ao período do fluxo, é determinado pelo somatório dos valores futuros (data focal n) de cada um de seus valores. Considerando a igualdade [V], pode-se obter a expressão para o cálculo do valor futuro do fluxo de caixa modelo-padrão, que ocorrerá em data coincidente com a data da última parcela (depósito ou pagamento):

$$\frac{VF}{(1+i)^n} = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Fazendo as devidas simplificações, obtém-se a expressão para o cálculo do valor futuro de uma série postecipada:

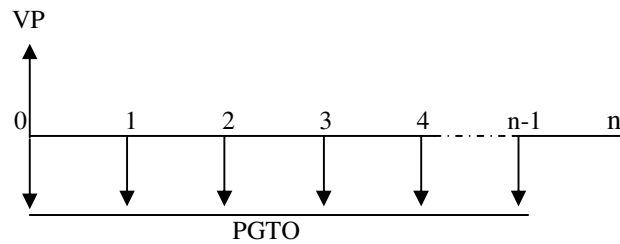
$$VF = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad [\text{XI}]$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor futuro de forma invertida:

$$PGTO = VF \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad [\text{XII}]$$

Com base no modelo-padrão, quando a primeira parcela for paga no ato, como entrada, a série de pagamento é denominada antecipada, exatamente em razão de o pagamento da primeira parcela estar sendo antecipado em um período.

Graficamente, o fluxo de caixa da série antecipada pode ser assim representado:



Vieira Sobrinho (1998, p. 81) define que nas séries com termos antecipados os pagamentos ou recebimentos ocorrem no início de cada período unitário; assim, a primeira prestação é sempre paga no momento “zero”, ou seja, na data da contratação do empréstimo. Por conseguinte, todos os problemas de séries de pagamentos ou recebimentos antecipados poderão ser resolvidos a partir dos fatores tabelados ou calculados para a série de pagamentos postecipados (ou com termos vencidos), bastando multiplicá-los ou dividi-los por  $(1+i)$ .

A divisão ou multiplicação por  $(1+i)$  dependerá do que se quer determinar. Ao se determinar o valor presente da série antecipada, como o primeiro pagamento é na data zero, o valor presente do modelo-padrão estará calculado na data menos um  $(-1)$ . Para obter o valor presente da série antecipada, na data zero, tem-se, então, que multiplicar o fator do modelo-padrão por  $(1+i)$ . Ao se determinar o valor das parcelas constantes, o procedimento é o inverso, como se constata:

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \times (1+i)^1$$

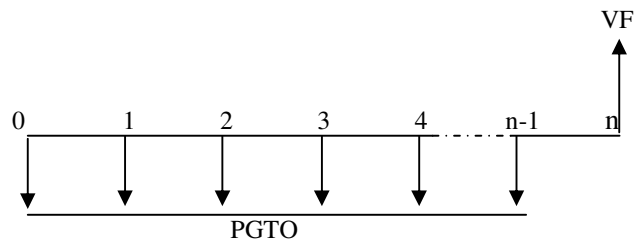
Fazendo as devidas simplificações, obtém-se a expressão para o cálculo do valor presente de uma série antecipada:

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \quad \text{[XIII]}$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor presente de forma invertida:

$$PGTO = VP \times \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \quad \text{[XIV]}$$

Graficamente, o fluxo de caixa da série antecipada pode ser também representado em função do valor futuro:



Considerando que o valor futuro da série antecipada ocorre um período após o valor futuro da série postecipada, se obtém a expressão para o cálculo do valor futuro (montante) do fluxo de caixa com termos antecipados, que ocorrerá um período após o último depósito (pagamento):

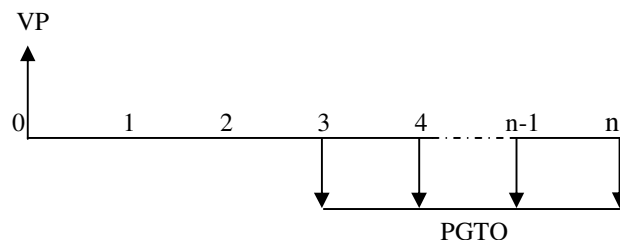
$$VF = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i) \quad [\text{XV}]$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor futuro de forma invertida:

$$PGTO = \frac{VF}{(1+i)} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad [\text{XVI}]$$

Com base no modelo-padrão, quando a primeira parcela for paga a partir do primeiro período, portanto com diferimento ou carência para se pagar a primeira prestação, a série de pagamento é denominada diferida.

Graficamente, o fluxo de caixa da série diferida, com carência igual a 2 (dois) períodos, é assim representado:





Mathias e Gomes (2002, p. 295), ao apresentarem os modelos genéricos de anuidades ou séries uniformes, conceituam anuidades diferidas como sendo aquelas em que os termos são exigíveis, pelo menos, a partir do segundo período. Em outras palavras, o primeiro termo é exigível a partir de certo período de carência. Tudo se passa como se os termos fossem transladados de um intervalo de tempo igual à carência ( $m$ ).

Conclui-se, então, que a carência ( $m$ ) caracterizar-se-á quando o primeiro pagamento ou recebimento ocorrer após o final do primeiro período, ou seja, se o primeiro pagamento de uma série de pagamentos uniformes e periódicos ocorrer no 2º (segundo) período, a carência será um período; se o primeiro pagamento de uma série de pagamentos uniformes e periódicos ocorrer no 3º (terceiro) período, a carência será dois períodos, e assim sucessivamente. Todos os problemas de séries de pagamentos diferidos poderão ser resolvidos a partir dos fatores tabelados para a série de pagamentos com termos postecipados (ou vencidos), bastando multiplicá-los ou dividi-los por  $(1+i)^m$ , sendo  $m$  igual à carência.

A divisão ou multiplicação por  $(1+i)^m$  dependerá do que se quer determinar. Ao se determinar o valor presente da série diferida, como o primeiro pagamento dar-se-á na data carência mais um ( $m+1$ ), o valor presente do modelo-padrão sairá na data igual à carência, obrigando-se, então, a dividir o fator do modelo-padrão por  $(1+i)^m$ .

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \div (1+i)^m$$

Fazendo as devidas simplificações, obtém-se a expressão para o cálculo do valor presente de um fluxo com termos diferidos:

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+m} \times i} \quad \text{[XVII]}$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor presente de um fluxo com termos diferidos de forma invertida:

$$PGTO = VP \times \frac{(1+i)^{n+m} \times i}{(1+i)^n - 1} \quad \text{[XVIII]}$$

As calculadoras ou *softwares* financeiros têm funções apropriadas para cálculo das cinco variáveis componentes das fórmulas, ou seja, VP - valor presente (PV - *present value*), VF - valor futuro (FV - *future value*), PGTO - pagamento (PMT - *payment*), n - número de pagamentos (n - *number*) e i - TAXA (i - *interest*) de séries ou fluxos de pagamentos uniformes previamente armazenados. Para resolver os problemas na forma algébrica podem-se utilizar também tabelas financeiras, que contêm os referidos fatores.

b) Fluxos não-uniformes ou não-homogêneos

Souza e Clemente (2000, p. 77), ao analisarem séries de pagamentos, comentam que em muitas situações elas apresentam valores distintos para cada época e que o valor presente de um valor futuro qualquer é obtido pela fórmula básica que relaciona dois valores monetários em épocas distintas no tempo, e concluem que a concentração de todos esses diferentes fluxos na data focal zero é obtida transportando-se cada valor para essa data e, em seguida, procedendo ao somatório.

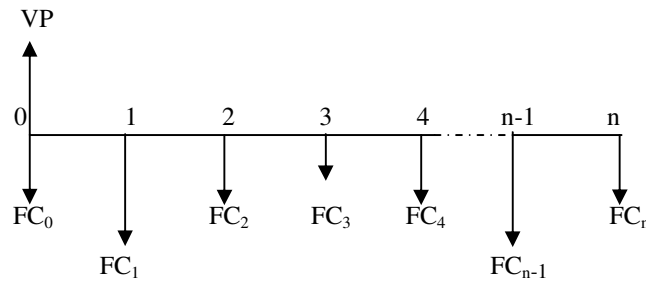
Segundo Puccini (2006, p. 190), fluxos de caixa cujos valores são distintos entre si e que não apresentam nenhuma lei de formação que permita uma simplificação do cálculo do valor presente, são denominados fluxos de caixa não-homogêneos. Dentre os fluxos de caixa não convencionais, para Assaf Neto (2001, p. 199), encontram-se aqueles em que os valores de caixa apresentam-se desiguais (variáveis): “o valor presente é calculado pela soma dos valores atualizados de cada um de seus termos e o valor futuro, por seu lado, é determinado pelo somatório dos montantes de cada um dos termos ou, ainda, capitalizando-se o valor presente para a data futura”.

Já, para Mathias e Gomes (2002, p. 271), as anuidades, cujos termos não são iguais entre si, são denominadas anuidades variáveis e calcula-se o seu valor atual como sendo a soma dos valores atuais de cada um de seus termos e o montante pela capitalização do valor atual ou pela soma dos montantes de cada termo.

Valor presente, taxa de desconto e fluxos de caixa, com respectiva equivalência, são conceitos totalmente interdependentes. Segundo Puccini (2006, p. 123), o valor monetário (VP) do ponto zero da escala de tempo é o valor presente de um fluxo de caixa, que é equivalente à soma de suas parcelas futuras, transportadas para o ponto zero, com uma determinada taxa de desconto.

Portanto, o valor presente de um fluxo de caixa não-uniforme é a soma dos valores presentes de todos os diferentes fluxos de caixa ( $FC_j$ ), na data focal zero, descontadas a uma determinada taxa efetiva, no mesmo período do fluxo.

Graficamente, o fluxo de caixa não-uniforme pode ser assim representado:

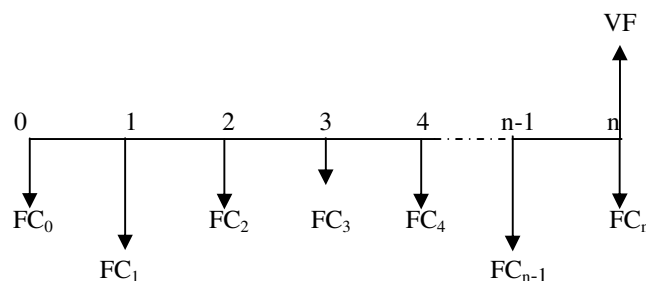


O valor presente (VP) desse fluxo de caixa, para uma taxa definida em período igual ao período do fluxo, é determinado pelo somatório dos valores presentes (data focal zero) de cada um de seus valores:

$$VP = FC_0 + FC_1(1+i)^{-1} + FC_2(1+i)^{-2} + \dots + FC_{n-1}(1+i)^{-n+1} + FC_n(1+i)^{-n}$$

$$VP = \sum_{j=0}^n \frac{FC_j}{(1+i)^j} \quad \text{[XIX]}$$

Graficamente, o fluxo de caixa não-uniforme, em função do valor futuro, pode ser assim representado:



O valor futuro (VF) desse fluxo de caixa, para uma taxa definida em período igual ao período do fluxo, é determinado pelo somatório dos valores futuros (data focal n) de cada um de seus valores:

$$VF = FC_0 + FC_1(1+i)^1 + FC_2(1+i)^2 + \dots + FC_{n-1}(1+i)^{n-1} + FC_n(1+i)^n$$

$$VF = \sum_{j=0}^n FC_j \times (1+i)^j \quad [\mathbf{XX}]$$

Ao se cotejar o valor presente dos fluxos futuros ( $FC_j$ ) dos pagamentos ou dos investimentos, com o valor inicial do empréstimo ou da aplicação (VP) tem-se como resultado um valor denominado valor presente líquido.

A obtenção do valor presente líquido (VPL), para séries não-uniformes, segundo Vieira Sobrinho (1998, p. 167), “consiste em calcular o valor presente de uma série de pagamentos (ou recebimentos) iguais ou diferentes a uma taxa conhecida, e deduzir deste o valor do fluxo inicial (valor do empréstimo ou investimento)”. Para Puccini (2006, p. 132), “o valor presente líquido de um fluxo de caixa é igual ao valor presente de suas parcelas futuras (que são descontadas a uma determinada taxa), somado algebricamente com a grandeza colocada no ponto zero”.

$$VPL = \sum_{j=1}^n \frac{FC_j}{(1+i)^j} - FC_0 \quad [\mathbf{XXI}]$$

Embora seja possível determinar o valor presente líquido em qualquer dos regimes de juros, as calculadoras e *softwares* financeiros têm funções apropriadas para cálculo do VPL - valor presente líquido (NPV - *net present value*) de fluxos de caixa somente no regime de juros compostos.

Assaf Neto (2001, p. 270) define a taxa interna de retorno como sendo “a taxa de juros (desconto) que iguala, em determinado momento do tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com o das saídas (pagamentos) previstas de caixa”. Para Teixeira e Di Pierro Netto (1998, p. 103), “a taxa interna de retorno de um fluxo de caixa pode ser entendida como sendo a taxa de desconto que faz com que as receitas futuras descontadas a esta taxa se igualem ao investimento inicial. Em outras palavras, é a taxa que proporciona o NPV de um investimento

igual a zero”. Em síntese, é o *i* das fórmulas de juros compostos e, normalmente, adota-se a data zero como data focal, considerando que o fluxo de caixa nessa data é representado pelo valor da operação.

$$FC_o = \sum_{j=1}^n \frac{FC_j}{(1+i)^j} \quad [XXII]$$

Embora seja possível determinar a taxa interna de retorno em qualquer dos dois regimes de capitalização de juros, as calculadoras e *softwares* financeiros têm funções apropriadas para cálculo da TIR – taxa interna de retorno (IRR – *internal rate return*) de fluxos de caixa somente no regime de juros compostos.

Existem outras técnicas para analisar fluxos de caixa, quando a decisão de investimento está em exame. Entretanto, essas técnicas não serão aqui apresentadas, por não serem relevantes para o estudo de amortização de empréstimos e seus reflexos, objeto deste trabalho.

### 2.3 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

Weston e Brigham (2000, p. 230) enfatizam que “uma das aplicações mais importantes dos juros compostos envolve empréstimos que são liquidados em prestações com o passar do tempo. (...) Se um empréstimo deve ser restituído em quantias periódicas iguais (mensal, trimestral ou anualmente), ele é chamado de **empréstimo amortizado**”, e complementam informando que a palavra amortizado vem do latim *mors*, que significa “morte”. Portanto, conclui-se que um empréstimo amortizado é aquele empréstimo liquidado com o tempo.

Segundo Veras (2001, p. 181) “as formas de pagamento dos empréstimos são chamados sistemas de amortização”. Da mesma forma, Neves (1982, p. 44) não somente entende por sistema de financiamento a maneira pela qual uma dívida será paga, mas complementa afirmando que “num sistema de financiamento a série de pagamentos a ser realizada para a liquidação da dívida será financeiramente equivalente ao valor da dívida, à taxa de juro do empréstimo”.

Weston e Brigham (2000, p. 231) destacam a importância da elaboração de planilha de amortização, em que demonstre precisamente como um empréstimo será restituído, fornecendo a discriminação do pagamento requerido e sua respectiva data, segregando as quantias de juros e principal.

Ao analisar um plano genérico de amortização, Faro (1990, p. 206) faz o seguinte comentário:

Ressalvadas as diferenças específicas, os planos usuais de amortização de dívidas estabelecem um conjunto de prestações periódicas ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ), onde o número  $n$  de prestações define o chamado prazo de financiamento, que resgatam o valor  $V$  do empréstimo concedido. Para fins contábeis, principalmente tendo em vista o aspecto fiscal, supõe-se que as prestações sejam constituídas de duas parcelas: uma dita de amortização (ou de restituição do empréstimo) e a outra de juros (ou de remuneração do empréstimo), sendo que, em certas situações, as parcelas de juros são dedutíveis no processo de determinação do IR a pagar.

Buscando, ainda, enfatizar o aspecto contábil, Faro (1990, p. 213) comenta que “para fins fiscais, tendo-se em vista que, ao menos em certas operações, as parcelas de juros são dedutíveis do lucro contábil tributável, é interessante que saibamos calcular o total de juros pagos em determinado período”.

Brigham e Houston (1999, p. 233) enfatizam que “para propósitos fiscais, uma empresa tomadora de empréstimos declara o componente de juros como custo dedutível a cada ano, enquanto que o fornecedor do empréstimo declara o mesmo valor como renda tributável”.

Nessa mesma linha, Ayres Jr. (1981, p. 133) alerta que, para fins de contabilização, é desejável preparar uma tabela de amortização que indique em cada pagamento, a parte que se destina ao pagamento de juros e a parte destinada propriamente à amortização da dívida; e Araújo (1993, p. 185) pondera que, por imposições jurídico-contábeis, os empréstimos de longo prazo são desenvolvidos em planilhas em que, de forma especial, se destacam o saldo devedor, as amortizações, os juros e as prestações de cada período.

Samanez (2007, p. 150), além de mencionar que a prestação é a soma da amortização e os juros correspondentes aos saldos, enfatiza que essa separação “é importante para as necessidades jurídico-contábeis e para a análise de investimentos, em que os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, têm um efeito fiscal”.

Juer (1985, p. 279-280) também realça que em face das necessidades jurídico-contábeis, nas operações de empréstimos, é preciso discriminar os juros e em que época serão efetivamente pagos ou recebidos. Os sistemas de empréstimos vistos em sua obra são Sistema Francês de Amortização, Sistema Americano de Amortização, Sistema Alemão de Amortização, Sistema de

Amortizações Constantes e Sistema Misto, nos quais “o resgate é feito parceladamente, geralmente de longo prazo, a juros compostos”.

Entretanto, Mathias e Gomes (2002, p. 307) afirmam que “nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas os regimes de juros compostos; pois, se os juros são calculados desse modo, o não-pagamento de juros de um dado período levará a um saldo devedor maior, sendo calculado juro sobre juro” [sic]. Os sistemas estudados em sua obra são Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema Francês (Price), Sistema Americano e Sistema de Amortizações Variáveis.

Da mesma forma, porém utilizando outro argumento para a caracterização do juro sobre juro, Assaf Neto (2001, p.335) destaca que “uma característica fundamental dos sistemas de amortização estudados neste capítulo é a utilização exclusiva do critério de juros compostos, em razão de a taxa de juros incidir exclusivamente sobre o saldo devedor (montante) apurado em período imediatamente anterior”. Os sistemas estudados em sua obra são Sistema de Amortização Constante – SAC, Sistema de Amortização Francês (Price) – SAF, Sistema de Amortização Misto – SAM e Sistema de Amortização Americano – SAA.

Para caracterizar a incidência de juros sobre juros no Sistema Price, Nogueira (2002, p. 223) afirma “que da primeira parcela cobrada até a última, a prestação permanece inalterada e o saldo devedor nunca deduz o juro que foi pago, assim sendo não precisaríamos ir mais longe na conclusão do anatocismo, uma vez que, para cada parcela paga, para apurarmos o saldo devedor, deve-se deduzir do total pago somente uma parte que é a amortização” [sic].

Todavia, Faro (1989, p. 242) alerta que “sendo os juros calculados período a período, e como para um período não há diferença entre a capitalização simples e composta, tudo se passa como se o capital fosse emprestado à taxa  $i$  de juros simples” [sic].

Em contraste, Lapponi (2006, p. 427) após construir as planilhas de um financiamento pelo sistema de amortização Price, destacando o juro, a amortização e o saldo devedor, conclui:

Podemos ver que a taxa de juro paga pelo devedor é 6% ao mês e não há juro acumulado, ou juros sobre juros. O mesmo se deduz se periodicamente e de forma contratual o valor da taxa de juro sofrer mudança, pois as novas prestações serão sempre calculadas a partir do saldo devedor definido na última prestação honrada quando o juro nessa data foi zerado. Assim sendo, (...), nenhum juro, parcial ou total, é acrescido ao saldo devedor por não ter sido honrado durante o prazo de financiamento [sic].

Após construir as planilhas do plano de um financiamento pelo sistema de amortização SAC, destacando o juro, a amortização e o saldo devedor, Lapponi (2006, p. 430) afirma que no Sistema SAC não há juro acumulado ou juros sobre juros, ou seja, nenhum juro, parcial ou total, é acrescido ao saldo devedor por não ter sido honrado durante o prazo de financiamento [sic].

Branco, (2002, p. 159 e 167), ao demonstrar e realizar o cálculo dos juros período a período, tanto no Price e SAC, como no SAA, utiliza a fórmula de juros simples, deixando clara sua conduta com relação à capitalização dos juros nesses três sistemas de amortização [sic].

Ao abordar amortização a juros simples, Cavalheiro (1992, p. 134) destaca o método que liquida uma dívida por meio de prestações periódicas e constantes destinadas à amortização do capital, em que o valor da dívida é parcelado, pagando-se conjuntamente os juros correspondentes ao saldo devedor, decrescentes [sic].

Pires e Negra (2005, p. 44) procuram evidenciar que a fundamentação sobre a qual se alicerça toda a doutrina jurídica na identificação da capitalização de juros parte do pressuposto da utilização de expressão matemática que se utiliza juro composto e concluem:

(...) a formação dos juros se faz a partir do saldo devedor e não da parcela ou da prestação, e existe a evidência da não-existência de capitalização de juros porquanto dos pagamentos dos mesmos ao tempo de sua formação, conforme evidencia o saldo devedor indicado para cada mês, sempre em procedimento de redução, advindo da amortização resultante da diferença positiva entre a prestação e os juros incorridos [sic].

Vieira Sobrinho (2006, p. 1-4), ao elaborar parecer sobre a capitalização dos juros e o conceito de anatocismo, deixa claro que o valor das prestações na Tabela Price é obtido com base no critério de juros compostos e sustenta: “é fácil verificar que, ao se efetivar os pagamentos de cada uma das prestações nos respectivos vencimentos, os juros são integralmente pagos, e, portanto, nada restará de juros para o mês seguinte” e, após demonstrar em planilha de amortização, arremata: “podemos verificar que o valor dos juros devidos é integralmente pago e no mês seguinte a taxa incide somente sobre o saldo devedor que nada contém de juros, e assim sucessivamente” [sic].

Rezende (2003, p.146) conclui que qualquer que seja o sistema de amortização em que os juros são quitados mensalmente, sem serem incorporados ao saldo devedor, inexistente, até mesmo por definição, o fenômeno denominado ‘juros sobre juros’ e a única hipótese disso ocorrer é



quando a prestação torna-se inferior à parcela de juros, produzindo a denominada amortização negativa [sic].

Penna (2007, p. 146) afirma que, juridicamente, capitalização é a incidência de juros sobre juros e que em todos os sistemas de amortização em que os juros forem pagos periodicamente, não há incorporação deles ao saldo devedor; conseqüentemente, não há cobrança de juros sobre juros [sic].

Portanto, fica clara a divergência de opiniões entre autores e estudiosos da matéria, com relação à capitalização de juros nos sistemas de amortização de empréstimos mais usuais na realidade brasileira, em que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, justificando a investigação expressa nos objetivos geral e específicos desse trabalho.

### 2.3.1 Sistema Francês de Amortização – Tabela Price

Vieira Sobrinho (1998, p. 222), ao apresentar em seu livro os sistemas de amortização de empréstimos, destaca o Sistema Francês (Tabela Price) como largamente utilizado no mercado financeiro e de capitais brasileiro. Observa que esse sistema é mais conhecido no Brasil como Tabela Price, que consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação é composto por duas parcelas distintas: uma de encargos financeiros (juros) e outra de capital (amortização) e complementa:

De acordo com o Professor Mario Geraldo Pereira, a denominação “Tabela Price” se deve ao nome do matemático, filósofo e teólogo inglês Richard Price, (...) que incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos. A denominação “Sistema Francês”, pelo autor citado, deve-se ao fato de esse sistema ter-se efetivamente desenvolvido na França, no século XIX. O Sistema Francês consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização).

Segundo Nogueira (2002, p. 28), a partir de estudo a pedido de uma seguradora inglesa, Price publicou sua mais famosa obra de estatística *Northampton Mortality Tables* (Tábuas de Mortalidade de Northampton), que serviram para definir as probabilidades de vida e de morte. Com base nesse estudo e da elaboração das tábuas de mortalidade, segundo o autor (2002, p. 29),

foi publicada a obra final, em 1771, intitulada *Observations on Reversionary Payments* (Observações sobre Devolução de Pagamentos Reversíveis), onde consta, entre diferentes assuntos relacionados a seguros, a coleção das Tabelas de Juros Compostos, batizada no Brasil como Tabela Price.

Mathias e Gomes (2002, p.319), ao apresentarem os sistemas de amortização de empréstimos, fazem os seguintes destaques sobre o Sistema Price:

Este sistema também é conhecido como “Tabela Price” e é um caso particular do sistema francês, com as seguintes características:

1. A taxa de juros contratada é dada em termos nominais. Na prática, esta taxa é dada em termos anuais.
2. As prestações têm período menor que aquele a que se refere a taxa. Em geral, as amortizações são feitas em base mensal.
3. No cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Assaf Neto (2001, p.335) destaca que o Sistema de Amortização Francês (SAF), do qual o Sistema Price representa uma variante, estabelece que as prestações devam ser iguais, periódicas e sucessivas, equivalendo ao modelo-padrão de fluxos de caixa.

Entretanto, para Faria (2000, p. 174) “a Tabela Price é um caso particular do Sistema Francês de Amortização quando a prestação é mensal. Normalmente, a taxa de juros é dada ao ano e deve-se usar a taxa mensal proporcional” [sic] e para Faro (1990, p. 210) “usualmente, principalmente em operações de financiamento para fins habitacionais, a Tabela Price tem a conotação de implicar em prestações mensais com a taxa de juros sendo anual, com capitalização mensal”. Nessa mesma linha, Hoji (2007, p. 89) afirma que “no sistema Price, a taxa de juros é dada em termos nominais, geralmente em períodos anuais, mas os juros são calculados em bases mensais pelo regime de capitalização simples, o que resulta numa taxa efetiva maior do que a taxa nominal” [sic].

Em contraste, Vieira Sobrinho (1998, p. 125) observa que o Sistema Francês – Tabela Price não implica necessariamente em prestações mensais e em taxa de juros de 1% ao mês, (12% ao ano, como normalmente é indicado), podendo ser definidas prestações e taxas para quaisquer períodos.

### 2.3.2. Sistema de Amortização Constante – SAC

Vieira Sobrinho (2000, p. 230) realça a importância do Sistema de Amortização Constante - SAC no Brasil, principalmente pela sua utilização no Sistema Financeiro de Habitação, e comenta que sua denominação deriva de sua principal característica, ou seja, as amortizações iguais, e que consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação é composto de uma parcela de juros e outra de capital (ou amortização).

Da mesma forma, Assaf Neto (2001, p. 337) ensina que o SAC, como o próprio nome indica, tem como característica básica amortizações do principal constantes durante todo o prazo da operação e como os juros incidem sobre um saldo devedor decrescente, assumem valores decrescentes e, em consequência, as prestações periódicas e sucessivas são decrescentes em progressão aritmética.

Tanto Faro (1990, p. 224), como Kunen (2006, p.), além de destacarem as características desse sistema, informam que o SAC também costuma ser denominado de Método Hamburguês.

### 2.3.3. Sistema de Amortização Misto – SAM

Vieira Sobrinho (2000, p. 239) destaca que esse sistema foi criado pelo Banco Nacional da Habitação - BNH e constitui-se num misto entre o Price e o SAC, originando-se daí a sua denominação, e complementa que “o SAM é um plano de pagamentos composto por prestações cujos valores são resultantes da média aritmética dos valores das prestações dos planos SAC e Price, correspondentes aos respectivos prazos; os valores das parcelas de amortização e juros resultam da mesma regra”.

De acordo com Souza e Clemente (2000, p. 98), o sistema de amortização misto – SAM foi muito utilizado para financiamento dos programas de aquisição de casa própria e que a característica desse sistema é a de se posicionar, em termos de valor da prestação, consequentemente juros, amortização e saldo devedor, entre o Price e o SAC, de tal forma que o valor da prestação, e os demais componentes da planilha de amortização, representam a média aritmética dos valores desses dois referidos sistemas.

Para Assaf Neto (2001, p. 352), esse sistema representa basicamente a média aritmética entre o sistema Francês (Price) - SAF e o sistema de amortização constante - SAC, daí

explicitando a sua denominação. Para cada um dos valores de seu plano de pagamentos, devem-se somar aqueles obtidos pelo SAF com os do SAC e simplesmente dividir o resultado por dois.

Faro (1989, p. 254) comenta que o Sistema Financeiro da Habitação – SFH, buscando conciliar as vantagens e desvantagens da Tabela Price e SAC, introduziu o chamado Sistema de Amortização Mista – SAM, e ensina que esse sistema “é equivalente a imaginar-se que metade do capital seja financiada segundo o método francês e a outra metade, à mesma taxa e prazo, pelo método de amortização constante”.

Entretanto, em contraste, tanto Samanez (2007, p. 156), como Milone (2006, p. 234), definem que o sistema de amortização crescente – SACRE é um sistema misto entre o Price e o SAC, em que a prestação é igual à média aritmética entre as prestações desses dois sistemas, nas mesmas condições de juros e prazos [sic].

#### **2.3.4. Sistema de Amortização Crescente – SACRE**

O Sistema de Amortização Crescente – SACRE foi criado pela Caixa Econômica Federal para liquidação de financiamentos originários do Sistema Financeiro de Habitação. Kunen (2006, 231) afirma que esse sistema utiliza exatamente os conceitos do Sistema SAC, destacando-se o fato de que, enquanto a prestação é corrigida a cada 12 meses, o saldo devedor é atualizado mensalmente, podendo gerar algum valor residual no final do período. A prestação deverá ser recalculada a cada 12 meses, com base no saldo devedor do período imediatamente anterior e na quantidade de prestações a vencer; no entanto, considera-se o critério de cálculo de prestação para o primeiro período, repetindo-se para os demais 11 meses.

Segundo Branco (2002, p. 175), o sistema SACRE foi desenvolvido com o objetivo de permitir maior amortização do valor emprestado, reduzindo-se, simultaneamente, a parcela de juros sobre o saldo devedor, e as prestações mensais são calculadas com base no saldo devedor existente no início de cada período de 12 meses, da mesma forma como se obtém o valor da prestação do SAC. O autor alerta sobre a possibilidade de haver saldo remanescente no final do contrato, lembrando que o mutuário terá direito à devolução quando o saldo residual for negativo e, caso contrário, para a liquidação total da dívida, deverá efetuar o pagamento desse valor.

Neste sistema, Penna (2007, p. 55) menciona que o cálculo da prestação é feito em duas etapas: (1) apura-se o valor da parcela de amortização constante, dividindo o valor do

financiamento pelo prazo; (2) multiplica-se a taxa mensal de juros pelo valor do financiamento. O somatório dessas duas parcelas compõe o valor da prestação inicial que, a cada 12 meses é recalculada, considerando o saldo devedor atualizado, a taxa contratada e o prazo remanescente.

Contraopondo-se aos três autores, Samanez (2007, p. 156) afirma que “o Sistema de Amortizações Crescentes (SACRE) foi adotado recentemente pelo SFH na liquidação de financiamentos da casa própria e se baseia no SAC e no Price, já que a prestação é igual à média aritmética calculada entre as prestações desses dois sistemas, nas mesmas condições de juros e prazos”. Destaca, ainda, como vantagem do sistema, a queda mais acentuada do saldo devedor e menores chances de ter resíduo ao final do contrato, “como pode ocorrer no Sistema Price” e como uma das desvantagens, prestações iniciais ligeiramente mais altas que as do Price [sic].

Da mesma forma, Milone (2006, p. 234), afirma que “dentre os sistemas mistos, um dos mais conhecidos é o sistema de amortização crescente, abreviado SACRE, o qual conjuga o sistema francês com o SAC. (...) a prestação equivale à média aritmética ponderada daquelas que se obteria pelo SAC e Price. A análise da prestação obtida desse modo revela que ela forma uma P.A. de razão  $r = \frac{C_i}{2n}$ ” [sic].

### 2.3.5. Sistema de Amortização Americano – SAA

Na visão de Zentgraf (2007, p. 364), nesse sistema “o mutuário paga periodicamente apenas os juros do financiamento e devolve o capital emprestado de uma só vez no final do prazo contratado. Essa é a razão de muitos autores o classificarem como Sistema de Juros Constantes”.

Na versão mais comum do sistema americano, conforme Araújo (1993, p. 202), os juros são pagos periodicamente e as amortizações de uma única vez no último período. Há casos em que os juros não são pagos periodicamente e, assim, o saldo devedor deve ser capitalizado.

Da mesma forma, Assaf Neto (2001, p. 357) escreve que o sistema americano estipula que “a devolução do capital emprestado é efetuada ao final do período contratado da operação de uma só vez. Não se prevê, de acordo com esta característica básica do SAA, amortizações intermediárias durante o período de empréstimo. Os juros costumam ser pagos periodicamente”.

Mathias e Gomes (2002, p. 321) definem o sistema americano de forma semelhante; entretanto, dão o nome de carência ao prazo em que se pagam somente os juros. Veras (1991, p. 193) assegura que “por esse sistema, é indiferente que o regime de juros seja simples ou

composto; pois como os juros são pagos periodicamente, o saldo devedor é sempre o mesmo, o que não muda o valor básico para o cálculo dos juros” [sic].

Para Casarotto Filho e Kopittke (1996, p. 76), quem toma empréstimo nesse sistema deve normalmente formar um fundo para amortizar o principal; se a taxa do fundo for igual à taxa do empréstimo, tudo se passará como no sistema francês, pois o desembolso total será igual à prestação desse sistema. Da mesma forma, Kuhnen (2006, p. 189) observa que é comum ser constituído um fundo de amortização, com o objetivo de gerar um saldo no final do período equivalente ao valor a pagar no empréstimo, evitando-se o grande desembolso em uma única parcela.

Classificando a criação desse fundo como habitual, Mathias e Gomes (2002, p. 322) observam que “o chamado *sinking fund*, que muitas vezes é confundido com o ‘sistema americano’, é um fundo de amortização constituído pelo mutuário para pagar o principal devido. Com tal providência, o mutuário procura evitar o problema de liquidez que surgiria devido a um grande desembolso de uma só vez”. Segundo os autores (2002, p. 323), nas operações financeiras normais, via de regra, a taxa de juros da aplicação é menor que a taxa de juros cobrada pelo empréstimo.

### 2.3.6. Sistema de Prestação Constante – Juros Simples

Faro (1989, p. 112), ao apresentar a fórmula para o cálculo do valor das parcelas periódicas, constantes e postecipadas na equivalência em capitalização simples, observa que a expressão é irredutível e, portanto, de difícil manejo, levando os cálculos a serem feitos no regime de juros compostos, em que as fórmulas são de fácil utilização. Então, para cálculo do valor de cada uma das (n) prestações (p) mensais e iguais, postecipadas, sem entrada (E), no regime de juros simples, considerou o valor à vista (V) de certa mercadoria, com a taxa sendo dada em ano, com o divisor fixo  $\Delta$  sendo o resultado do quociente de 360 dias, número total de dias do ano comercial, pela taxa anual unitária (i):

$$V - E = p \times \sum_{j=1}^m \frac{\Delta}{\Delta + n_j} \quad \text{[XXIII]}$$

A pesquisa bibliográfica realizada neste trabalho não localizou outros autores que tratassem o sistema de prestações constantes a juros simples.

### 2.3.7. Sistema de Prestação Constante – Método de Gauss.

Da mesma forma que o Sistema Price, esse sistema tem como principal característica a liquidação de empréstimos em prestações constantes, periódicas e postecipadas; entretanto, as amortizações evoluem em progressão aritmética, com a equivalência sendo feita a juros simples, na data do valor futuro (data focal  $n$ ), enquanto que no Price as amortizações crescem geometricamente, com a equivalência sendo, costumeiramente, feita na data do valor presente (data focal zero), a juros compostos.

O argumento básico dos idealizadores desse sistema é que para o credor é indiferente receber o valor emprestado, com os juros devidos, em uma única vez ou em prestações periódicas e iguais. Nos dois casos, irá receber o valor emprestado, mais os juros devidos; pois, essas duas alternativas são equivalentes, no regime de capitalização simples [sic].

Nogueira (2002, p. 235-236) evidencia que a tabela de juro linear, fundamentada na progressão aritmética dada pelo preceito de Gauss, possui a seguinte fórmula literal para o cálculo do valor das ( $n$ ) parcelas ( $p$ ) iguais e sucessivas, sendo que a primeira será paga depois de um período da concessão do capital ( $k$ ), postecipada, à taxa no mesmo período das parcelas, na forma unitária ( $i\%$ ) [sic]:

$$p = \frac{k \times (i\% \times n) + k}{\{[i\% \times (n - 1) \div 2] + 1\} \times n} \quad \text{[XXIV]}$$

Ao considerar um financiamento a ser liquidado em quatorze parcelas mensais e iguais, a juros simples de 5% ao mês, o mesmo autor (2002, p. 236) destaca: “outro ponto importante a fomentar nessa comprovação científica é ainda expormos a parcela obtida em situação de valor futuro a juros simples, pela qual podemos constatar que, testada dessa forma, o resultado de retorno correspondente é exatamente 70%” [sic].

Ao deduzir a fórmula para o cálculo do valor dos pagamentos ( $p$ ) postecipados constantes, a partir do montante de um capital ( $C$ ), equivalendo a uma série de ( $n$ ) pagamentos ou depósitos postecipados constantes, com amortização a juros simples, à taxa no mesmo período das parcelas e na forma unitária ( $i$ ), Cavalheiro (1992, p. 134) chegou à seguinte formulação matemática [sic]:

$$p = C \times \frac{1 + in}{n \times [1 + i \times (n - 1) \div 2]} \quad \text{[XXV]}$$

De acordo com Penna (2007, p. 110), “juro sempre foi entendido, pelo mais comum dos mortais, como sendo a aplicação de uma taxa sobre um valor emprestado. (...) o denominado Método de Gauss não utiliza esses conceitos na apuração dos juros”. O referido autor (2007, p. 124) se refere a esse sistema como método linear ponderado (método da soma dos dígitos) e complementa: “não se trata de um sistema de amortização e sim de uma forma de diferimento de juros; tanto que pode ser utilizado em operações contratadas pelo sistema da Tabela Price”.

Não foram encontrados na literatura ou em documentos do sistema financeiro nacional levantamentos abrangentes sobre contratos de empréstimos e suas cláusulas referentes aos sistemas de amortização utilizados neste trabalho.



### 3. FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

A revisão teórica apresentou três grupos de conceitos: os regimes de capitalização de juros, em base conceitual e algébrica; os aspectos legais relacionados foram resgatados de forma a esclarecer como a legislação brasileira regulamenta a cobrança de juros e os aspectos contábeis foram sumarizados para evidenciar como os montantes, pagamentos, juros e amortizações são registrados e têm maior ou menor poder de evidenciação das variações de patrimônio e para disponibilizar informações relevantes para o decisor.

A problemática da equivalência de capitais é apresentada para os diferentes regimes de capitalização; cerne da questão de pesquisa. Por fim, os sistemas de amortização de empréstimos são conceituados. Esse tripé conceitual é relevante para embasar o raciocínio matemático desenvolvido ao longo da exploração do papel dos juros em cada um dos sistemas de amortização estudados.

Novamente, cabe ressaltar que a revisão teórica está quase toda pautada em textos nacionais em função da relevância do tema e da coexistência de longos períodos de elevadas taxas inflacionárias e de juros no Brasil. Por outro lado, é instigante escrever texto acadêmico sobre o tema, uma vez que as revistas científicas nacionais e estrangeiras pouco contemplam cada um dos eixos do tripé conceitual dessa dissertação.

Na área de ciências sociais aplicadas os temas podem ser estudados sob diversos prismas e propósitos. O estudo dos regimes de capitalização de juros e dos sistemas de amortização não é diferente. É possível realizar consistentes estudos práticos, abordando taxas de juros cobradas, volume de empréstimos concedidos, tipos de contratos, nível de inadimplência e outros. No entanto, é possível e necessário aprofundar e investigar de forma sistemática os fundamentos dos regimes de capitalização de juros e os impactos decorrentes nos diversos sistemas de amortização, conforme já destacado na introdução. Para esse prisma de estudo, a metodologia científica é o instrumento adequado.

A fundamentação metodológica, apresentada nesse capítulo, discorre sobre a caracterização da pesquisa e a forma como foi desenvolvido o estudo.

### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A palavra pesquisa, na concepção de Gil (1991, p. 36), “provém do espanhol e tem o sentido de indagação ou busca minuciosa para averiguação da realidade. Daí poder-se definir pesquisa científica como o processo de descobrir resposta para os problemas mediante a utilização de procedimentos científicos”.

A pesquisa científica utiliza várias metodologias e pode ser classificada de diferentes formas, segundo distintos autores. Essa seção fez-se valer dos conteúdos de Beuren, Bufrem, Cervo e Bervian, Collis e Hussey, Demo, Gil e Vergara.

Vergara (2000, p. 47) apresenta critérios básicos de classificação de pesquisa: quanto aos fins: exploratória, descritiva, explicativa, metodológica, aplicada e intervencionista; e quanto aos meios: pesquisa de campo, pesquisa de laboratório, telematizada, documental, bibliográfica, experimental, *ex-post-facto*, participante, pesquisa-ação e estudo de caso.

Com base nesses critérios, a pesquisa dessa dissertação pode ser assim classificada:

- quanto aos fins – trata-se de uma pesquisa aplicada, motivada pela necessidade de se investigar o regime de capitalização de juros nos empréstimos ou financiamentos liquidados ou projetados para serem liquidados por meio de parcelas periódicas, constantes ou não, antecipadas, postecipadas e diferidas.
- quanto aos meios - trata-se de pesquisa bibliográfica, pois será desenvolvido um sistematizado estudo e aplicação de raciocínio matemático, com base em material publicado em livros, revistas, redes eletrônicas, artigos e experiência do autor, para fundamentação teórica do estudo.

Segundo Gil (1996, p. 45), é possível classificar as pesquisas em três grandes grupos: exploratórias, descritivas e explicativas. A pesquisa dessa dissertação enquadra-se como descritiva e explicativa, em razão da conceituação explanada por esse autor:

As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinado fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis. (...) Algumas pesquisas descritivas vão além da simples identificação da existência de relações entre variáveis, pretendendo determinar a natureza dessa relação. (...) As

pesquisas descritivas quase sempre constituem etapa prévia indispensável para que se possa obter explicações científicas.

As pesquisas explicativas têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Este é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. (...) Pode-se dizer que o conhecimento científico está assentado nos resultados oferecidos pelos estudos explicativos.

Considerando as tipologias de delineamento de pesquisas com agrupamentos propostos por Beuren (2003, p. 79), quanto aos objetivos: exploratória, descritiva e explicativa; quanto aos procedimentos: o estudo de caso, o levantamento, a pesquisa bibliográfica, documental, participante e experimental; e quanto à abordagem do problema: pesquisa qualitativa e quantitativa.

A partir dessa tipologia, a pesquisa dessa dissertação enquadra-se:

- quanto aos procedimentos – pesquisa bibliográfica; pois tem o objetivo de recolher informações e conhecimentos prévios acerca de um problema para o qual se procura resposta. Por ser de natureza teórica, a pesquisa bibliográfica é parte obrigatória em qualquer tipo de pesquisa, haja vista que é por meio dela que se toma sobre a produção científica existente;
- quanto aos objetivos – trata-se de pesquisa descritiva uma vez que analisa relações entre variáveis antecedentes (os regimes de capitalização de juros) e conseqüentes (os sistemas de amortização). Mais profundamente, trata-se de pesquisa explicativa em razão de comprovar como se efetiva o nexos causal entre os fatores que contribuem para explicar os fenômenos analisados, ou seja, de que forma a capitalização dos juros ocorre em diferentes sistemas de amortização.

Considerando os gêneros propostos por DEMO (1989, p. 13), podem-se distinguir, pelo menos, quatro gêneros mais delineáveis de pesquisa, intercomunicados:

- a) há pesquisa **teórica**, dedicada a formular quadros de referência, a estudar teorias, a burilar conceitos;

- b) há pesquisa **metodológica**, dedicada a indagar por instrumentos, por caminhos, por modos de se fazer ciência, ou a produzir técnicas de tratamento da realidade, ou a discutir abordagens teórico-práticas;
- c) há pesquisa **empírica**, dedicada a codificar a face mensurável da realidade social;
- d) há pesquisa **prática**, voltada a intervir na realidade social, chamada pesquisa participante, avaliação qualitativa, pesquisa-ação etc.

O gênero de pesquisa metodológica predomina neste trabalho, porquanto investiga aspectos teóricos e aplicados, por meio de comprovação matemática, associando a aplicação de métodos e procedimentos para alcançar os fins a que se propõe.

## MÉTODOS

Para atingir os objetivos enunciados na introdução do trabalho, depois de caracterizado o tipo de pesquisa, é necessário estabelecer a forma como será conduzido, ou seja, os métodos, que segundo Collis & Hussey (2005) “(...) referem-se apenas às várias maneiras de coletar e/ou analisar dados”.

Conforme considera Gil (1999 p. 20), “a ciência é uma forma de conhecimento que tem como objetivo formular, mediante linguagem rigorosa e apropriada – se possível, com auxílio da linguagem matemática -, leis que regem os fenômenos”.

Fazendo reflexões sobre o método, Bufrem (2000, p. 22-23) resgata que Descartes “chega ao critério da evidência, invertendo os sinais do saber tradicional (mediato, não intuitivo, impessoal), para o saber racional (imediatamente, intuitivo, pessoal)”. Prosseguindo, pondera que o referido autor, em sua obra principal denominada Discurso do Método, expõe seus princípios metodológicos para bem dirigir a própria razão e procurar a verdade nas ciências, fundamentos que podem ser resumidos em dúvida sistemática, dedução e rejeição das noções tradicionais. A referida autora comenta, ainda, que o continuador de Descartes, Leibniz, também matemático e descobridor do cálculo diferencial, “concebeu a ciência em geral como uma espécie de matemática universal, onde primária o processo racional e dedutivo”.

Cervo e Bervian (1972, p. 36) afirmam que “todo método depende do objeto de investigação (...). Por isso, o ponto de partida do método racional é a observação desta realidade

ou a aceitação de certas proposições evidentes, princípios ou axiomas, para em seguida prosseguir por dedução ou indução, em virtude das exigências unicamente lógicas e racionais”.

Quanto ao processo dedutivo, Gil (1991, p. 22) assegura que “o raciocínio dedutivo parte de princípios gerais considerados como verdadeiros e indiscutíveis para chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente, de sua lógica”. Para Demo (1989, p. 136), “podemos considerar como protótipo do raciocínio dedutivo o silogismo, tido pela escolástica e pelos lógicos formais como o argumento por excelência”.

Ruiz (1995, p. 138-139) ensina que o pensamento é dedutivo quando “a partir de enunciados mais gerais dispostos ordenadamente como premissas de um raciocínio, chega a uma conclusão particular ou menos geral”. O referido autor assevera ainda, que “as demonstrações das propriedades matemáticas a partir de axiomas e de definições ideais, por exemplo, utilizam-se principalmente do método dedutivo, cuja função básica é explicitar ao longo da demonstração aquilo que implicitamente já se encontra no antecedente”.

Este trabalho segue abordagem racional e dedutiva, por meio de comprovação matemática de pressupostos teóricos, cujo objetivo geral (principal) e específicos (secundários) estão assim estabelecidos:

#### Objetivo Geral

- Determinar os impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos e caracterizar qual regime de capitalização de juros, simples ou composto, é utilizado nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.

#### Objetivos Específicos

- Demonstrar a equivalência de capitais e de fluxo de caixa na capitalização simples e composta;
- Demonstrar que os sistemas de amortização e de capitalização são convergentes.
- Caracterizar o regime de capitalização e desenvolver as planilhas, em moeda constante, com parcelas periódicas, postecipadas, constantes ou não, nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.
- Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos pagamentos em cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e

composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no patrimônio dos tomadores de empréstimos.

- Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos juros de cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no valor do benefício fiscal dos tomadores de empréstimos.

Nos próximos capítulos, para poder cumprir esses objetivos, são desenvolvidas as análises da dissertação, cerne do trabalho de pesquisa.

## **4. ANÁLISE DOS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO**

Nessa seção é demonstrado o desenvolvimento lógico/matemático do tema proposto. Inicialmente é apresentado o raciocínio da equivalência de capitais em juros simples e juros compostos; em seguida, as formas de cálculo nos regimes de capitalização em aplicações e empréstimos de dinheiro. Essa argumentação subsidia as análises dos sistemas de amortização apresentadas nos capítulos quinto e sexto, e os efeitos da capitalização de juros nos sistemas de amortização de empréstimos e seus reflexos patrimoniais e financeiros, desenvolvidos no sétimo capítulo.

As análises desenvolvidas estão separadas em cinco capítulos, como forma de destacar cada um dos aspectos relacionados à complexidade do tema. As conclusões e recomendações encerram o quinto capítulo de análise e situam-se no oitavo capítulo dessa dissertação.

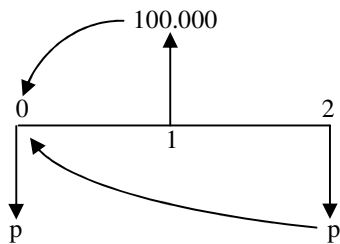
### **4.1 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS**

As questões de valor do dinheiro no tempo, também denominado análise do fluxo de caixa descontado, constituem fundamento conceitual para a compreensão da equivalência de capitais nos regimes de capitalização dos juros.

#### **4.1.1 Equivalência em Juros Simples**

Ao se considerar que o desconto racional simples é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (valor atual ou capital) pelo prazo de antecipação, e o juro simples é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (capital ou valor atual) pelo prazo decorrido, e que o prazo de antecipação e o prazo decorrido são iguais, conclui-se que o valor do desconto racional simples é igual ao valor do juro simples, diferenciando-se, apenas, conceitualmente.

Para melhor elucidação, admita-se o seguinte exemplo: uma pessoa deveria pagar \$ 100.000,00 no prazo de um mês; propõe liquidar essa dívida em dois pagamentos iguais, com o 1º pagamento sendo efetuado hoje (data zero) e outro no prazo de 2 meses. Adotando-se as datas zero, um e dois como datas focais e o critério de desconto racional simples, determine-se o valor dos pagamentos se a taxa de juros simples negociada for de 10% ao mês.

**DATA FOCAL = ZERO**

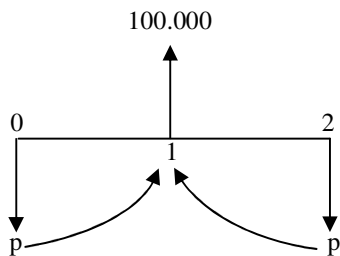
$$\frac{100.000}{(1 + 0,10 \times 1)} = p + \frac{p}{(1 + 0,10 \times 2)}$$

$$90.909,09 = p + \frac{p}{(1 + 0,20)}$$

Eliminando-se o denominador, obtém-se:

$$90.909,09 \times (1 + 0,20) = p \times (1 + 0,20) + p$$

$$\mathbf{p = 49.586,78}$$

**DATA FOCAL = 1 (MÊS)**

$$100.000 = p \times (1 + 0,10 \times 1) + \frac{p}{(1 + 0,10 \times 1)}$$

Como  $100.000,00$  (na data 1) =  $90.909,09 \times (1 + 0,10 \times 1)$ , tem-se:

$$90.909,09 \times (1 + 0,10 \times 1) = p \times (1 + 0,10 \times 1) + \frac{p}{(1 + 0,10 \times 1)}$$

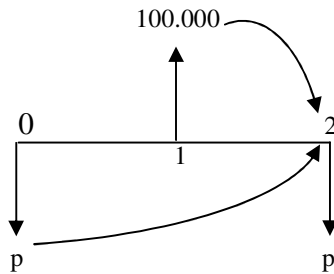
Eliminando-se o denominador, obtém-se:

$$90.909,09 \times (1 + 0,10)^2 = p \times (1 + 0,10)^2 + p$$

$$\mathbf{p = 49.773,76}$$



**DATA FOCAL = 2 (MESES)**



$$100.000,00 \times (1 + 0,10 \times 1) = p \times (1 + 0,10 \times 2) + p$$

$$90.909,09 \times (1 + 0,10 \times 1) \times (1 + 0,10 \times 1) = p \times (1 + 0,10 \times 2) + p$$

$$90.909,09 \times (1 + 0,10)^2 = p \times (1 + 0,20) + p$$

$$\mathbf{p = 50.000,00}$$

Ao executar os cálculos, adotando as três datas focais requeridas, constata-se que na capitalização simples as equações e, por conseguinte, os resultados obtidos, foram completamente diferentes. Essa disparidade ocorre porque na capitalização simples os juros vencem a termo, não sendo admissível fracionar o prazo da aplicação ou empréstimo, exigindo um único período de capitalização, ou seja, o total de juros e o capital inicial têm de ser resgatados ou liquidados de uma só vez, caracterizando uma única operação.

Como restou cientificamente comprovado, na capitalização simples, ao se colocar o montante de certo capital C, calculado à taxa i e para um prazo  $n_1$ , à mesma taxa i e por um prazo  $n_2$ , o montante final será diferente do calculado considerando-se o capital C colocado à mesma taxa i, durante o prazo total  $n = n_1 + n_2$ .

$$C \times (1 + i \times n) \neq C \times (1 + i \times n_1) \times (1 + i \times n_2)$$

É importante observar que, ao se proceder à equivalência nas datas focais **1** (um) e **2** (dois) está se acrescentando juro sobre um valor que já contém juro, descaracterizando a capitalização simples, cuja incidência da taxa se dá apenas sobre o capital inicial, na data zero. Saliente-se que  $(1 + i)^2$  caracteriza a incidência de juros sobre juro = capitalização composta.

Logo, é instantâneo inferir que somente não caracterizará juro sobre juro quando a taxa incidir sobre um capital que se encontra na **data focal zero, única data em que um valor não contém juros**; porquanto, em qualquer outra data haverá juro embutido, da data zero até essa outra data, validando o fundamento da teoria da preferência pela liquidez (valor do dinheiro no tempo). Conclui-se, por conseguinte, que a equivalência financeira entre valores, no regime de juros simples, depende da data focal escolhida: data zero; porquanto, qualquer outra data definida como focal caracterizará juro composto, com a incidência de taxa de juros sobre um valor que contém juro, como ficou matematicamente comprovado, quando efetivada a equivalência nas datas focais **um e dois**, com o aparecimento do fator de capitalização composta  $(1+i)^2$ .

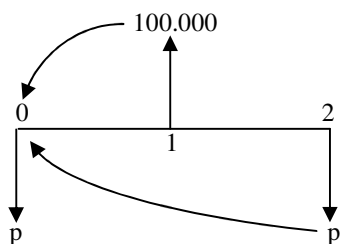
Portanto, **na capitalização simples, a equivalência deve ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como data focal**, como restou cientificamente comprovado.

#### 4.1.2 Equivalência em Juros Compostos

Ao se considerar que o desconto racional composto é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (valor atual ou capital) pelo prazo de antecipação, e o juro composto é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (capital ou valor atual) pelo prazo decorrido, e que o prazo de antecipação e o prazo decorrido são iguais, conclui-se que o valor do desconto racional composto é igual ao valor do juro composto, diferenciando-se, apenas, conceitualmente.

Para melhor elucidação e comparação com a capitalização simples, admita-se o mesmo exemplo: uma pessoa deveria pagar \$ 100.000,00 no prazo de um mês; propõe liquidar essa dívida em dois pagamentos iguais: 1º pagamento hoje (data zero) e o outro no prazo de 2 meses. Adotando-se as datas zero, um e dois como datas focais, determine-se o valor dos pagamentos se a taxa de juros compostos negociada for de 10% ao mês.

#### DATA FOCAL = ZERO



$$\frac{100.000}{(1+i)^1} = p + \frac{p}{(1+i)^2}$$

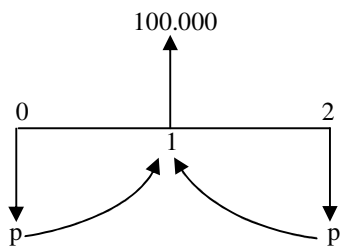
$$90.909,09 = p + \frac{p}{(1+i)^2}$$

Eliminando-se o denominador, obtém-se:

$$100.000 \times (1+0,10)^1 = p \times (1+0,10)^2 + p$$

$$p = 49.773,76$$

**DATA FOCAL = 1 (MÊS)**



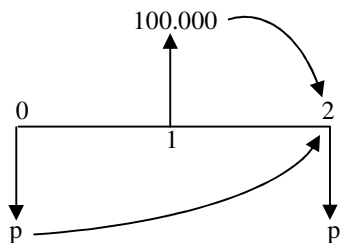
$$100.000 = p \times (1+0,10)^1 + \frac{p}{(1+0,10)^1}$$

Eliminando-se o denominador, obtém-se:

$$100.000 \times (1+0,10) = p \times (1+0,10)^2 + p$$

$$p = 49.773,76$$

**DATA FOCAL = 2 (MESES)**



$$100.000 \times (1+0,10) = p \times (1+0,10)^2 + p$$

$$p = 49.773,76$$

Ao executar os cálculos, adotando as três datas focais requeridas, constata-se que na capitalização composta, qualquer que seja a data focal adotada, obtém-se o mesmo resultado; porquanto, as equações, depois de eliminados os denominadores, são rigorosamente as mesmas.

É oportuno enfatizar que a caracterização de juros compostos se dá pelo aparecimento do fator de capitalização composta  $(1 + 0,10)^2$ , como ocorreu nas três datas focais definidas na equivalência em juros compostos e nas datas focais 1 e 2 na equivalência em juros simples.

Procedendo-se de forma análoga à utilizada na capitalização simples, observa-se que, na capitalização composta, ao se colocar o montante de certo capital C, calculado à taxa i e para um prazo  $n_1$ , à mesma taxa i e por um prazo  $n_2$ , o montante final será idêntico ao calculado quando se considera o capital C colocado à mesma taxa i, durante o prazo total  $n = n_1 + n_2$ . Considerando-se a multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes, motivando a seguinte conclusão:

$$C \times (1+i)^n = C \times (1+i)^{n_1} \times (1+i)^{n_2}.$$

A equivalência, independente de data focal definida, ocorre porque o juro composto é equivalente ao desconto racional composto, em que os processos de capitalização e descapitalização são inversos, com a taxa incidindo sempre sobre o valor presente: capital, quando se tratar de juro, e valor atual (líquido), quando se tratar de desconto; ou seja, os juros compostos, diferentemente dos juros simples, não são capitalizados somente a termo, devem ser capitalizados periodicamente, conforme o período de capitalização estabelecido, em razão de o prazo de aplicação ou empréstimo ser cindível.

Portanto, conclui-se que **a equivalência financeira entre valores, no regime de juros compostos, independe da data focal escolhida; porquanto, qualquer que seja a data focal definida, obtêm-se os mesmos resultados**, como restou cientificamente comprovado.

#### 4.2 CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

É pressuposto da questão de pesquisa a existência e o entendimento dos dois regimes de capitalização dos juros. Os regimes de capitalização destacam a forma como os juros são determinados e incorporados ao capital, sucessivamente ou de uma única vez.

#### 4.2.1 Capitalização Simples

Diz-se simples porque a base da incidência da taxa de juros é simples, formada por um único valor, geralmente denominada capital inicial. O juro simples exige um único período de capitalização, vence a termo, ou seja, não admite fracionamento de prazo.

#### 4.2.2 Capitalização Composta

Diz-se composta porque a base da incidência da taxa é composta, constituída não somente pelo capital inicial, mas também pelos juros formados nos períodos anteriores de capitalização. O juro composto não vence a termo, exige mais de um período de capitalização, ou seja, o fracionamento de prazo é característica da capitalização composta.

Considerando que a capitalização contínua, ao incorporar juros ao capital em intervalos infinitesimais de tempo, caracteriza o regime composto de capitalização, nesse trabalho, admitem-se apenas dois regimes de capitalização dos juros: simples e composto, e o tempo será medido sempre de forma discreta.

#### 4.2.3 Aplicação de dinheiro

De modo geral, para facilitar a compreensão e a comparação entre os regimes, a literatura tem conceituado e exemplificado a capitalização simples apenas de forma clássica, definindo que nesse regime de capitalização os juros de cada período são sempre calculados sobre o valor do capital inicial aplicado e não são somados a esse capital para render juros nos períodos seguintes.

Para melhor visualização e entendimento da capitalização simples, na forma clássica, adote-se como exemplo uma aplicação de R\$ 100.000,00, para resgate no final de cinco meses, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros auferidos (a receber) e os saldos credores (montantes), período a período, conforme Quadro 2:

Mês	Depósitos	Juros auferidos	Saques	Saldo credor
0	100.000,00	0,00	0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	10.000,00	0,00	120.000,00
3	0,00	10.000,00	0,00	130.000,00
4	0,00	10.000,00	0,00	140.000,00
5	0,00	10.000,00	150.000,00	0,00

Quadro 2: Capitalização simples – Aplicação única, com resgate final.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observar o Quadro 2, verifica-se que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial aplicado, na data zero, descaracterizando a incidência de juro sobre juro. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro simples.

Como a taxa de juros de 10% ao mês incide sempre sobre a mesma base (simples), capital inicial aplicado, o juro produzido em cada período é constante e, por conseqüência, o saldo credor cresce periodicamente a essa constante. Em havendo crescimento constante conclui-se que se está defronte de uma progressão e, quando essa constante – chamada razão - ocorre pela diferença entre um termo e o seu antecedente, a progressão é aritmética e o crescimento dos juros se dá de forma linear (proporcional).

É importante considerar que o juro simples vence a termo, exigindo um único período de capitalização, e não permite, portanto, movimentações parciais (depósitos ou saques); pois, caso houvesse, a taxa teria que incidir sobre valor diferente do capital inicial aplicado, na data zero, ou as movimentações teriam que ser ignoradas. No exemplo, embora o cálculo seja efetivado período a período, somente poderiam ser resgatados \$ 110.000,00 no primeiro mês ou \$ 120.000,00 no segundo ou \$ 130.000,00 no terceiro ou \$ 140.000,00 no quarto ou \$ 150.000,00 no quinto mês, produzindo as respectivas taxas efetivas periódicas de aplicação de 10%, 20%, 30%, 40% e 50%, proporcionais (juros simples) à taxa contratada de 10% ao mês.

Qualquer resgate diferente desses cinco saldos credores (montantes) ou do resgate total da aplicação em um único saque, a capitalização deixaria de ser simples; pois haveria fracionamento de prazo e a taxa incidiria sobre valor diferente do capital inicial aplicado, valor este em data posterior à data zero, contendo, portanto, juros auferidos e não sacados (valor do dinheiro no tempo). Enfatize-se: capital inicial aplicado é somente aquele valor que se encontra na data zero (data-referencial), única data em que um valor não contém juro, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez (valor do dinheiro no tempo).

Nada impede, no entanto, que os juros simples sejam calculados periodicamente, mas sempre sobre o capital inicial aplicado (data zero). Contudo, é imprescindível que o resgate seja único, correspondente ao somatório do capital inicial aplicado e o total de juros auferidos (saldo credor) até a data do resgate total, caracterizando uma única operação. Portanto, é característica da capitalização simples não admitir que juros auferidos e não sacados, total ou parcialmente, façam parte do saldo credor para render juros nos períodos seguintes.

Procedendo a um tratamento algébrico no comportamento da capitalização simples e considerando o saldo credor como SD, o capital inicial aplicado como  $SD_0$  e os juros auferidos (a receber) como J, ao analisar o Quadro 2, tem-se o seguinte desenvolvimento e formulação:

$$J_1 = SD_0 \times i$$

$$SD_1 = SD_0 + J_1$$

Substituindo  $J_1$ , tem-se:

$$SD_1 = SD_0 + SD_0 \times i$$

Fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i)$$

$$J_2 = SD_1 \times i$$

$$SD_2 = SD_1 + J_2$$

Substituindo  $SD_1$  e  $J_2$ , tem-se:

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i) + SD_0 \times i$$

Fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + 2i)$$

Ao considerar genericamente  $SD_t$  como o saldo credor ao final de um período de ordem t, qualquer, obtém-se fórmula idêntica à do montante de juros simples [III], calculado sobre o valor do capital inicial aplicado:  $SD_t = SD_0 \times (1 + i t)$ .

De forma semelhante à capitalização simples, a literatura tem conceituado e exemplificado a capitalização composta apenas de forma clássica, definindo que nesse regime de capitalização os juros auferidos de cada período são sempre calculados sobre o capital inicial aplicado, acrescido dos juros auferidos até o período anterior (saldo credor anterior), e somados a esse saldo credor, para render novos juros nos períodos seguintes.

A caracterização da capitalização composta se dá quando a taxa de juros (i) incide sobre um valor que contém juro auferido embutido (fator do montante =  $1 + i$ ):

$$(1 + i) \times i = i + i^2 \quad \text{ou}$$

$$(1 + i) \times (1 + i) = (1 + i)^2 = 1 + i + 1 + i^2 = 2 + i + i^2$$

Portanto, a caracterização da incidência de juros sobre juros (capitalização composta) se dá pelo aparecimento do fator de capitalização  $(1 + i)^n$  ou  $i^n$ , com  $n > 1$ .

Para melhor visualização e entendimento da capitalização composta, na forma clássica, e para comparar com a capitalização simples, tome-se a mesma aplicação de R\$ 100.000,00, para resgate no final de cinco meses, à taxa de contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros auferidos e os saldos credores (montantes), período a período, conforme Quadro 3:

Mês	Depósito	Juros auferidos	Saque	Saldo credor
0	100.000,00	0,00	0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	11.000,00	0,00	121.000,00
3	0,00	12.100,00	0,00	133.100,00
4	0,00	13.310,00	0,00	146.410,00
5	0,00	14.641,00	161.051,00	0,00

Quadro 3: Capitalização composta – Aplicação única, com resgate final.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observar o Quadro 3, verifica-se que a taxa de juros incide sobre o saldo credor anterior, que contém juros auferidos, caracterizando a incidência de juro sobre juro, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Como a taxa de juros incide não somente sobre o capital inicial aplicado, mas também sobre os juros auferidos nos períodos anteriores (saldo credor anterior), os juros auferidos em cada período são crescentes, não caracterizando, portanto, uma progressão aritmética, como aconteceu na capitalização simples.

Entretanto, se aprofundar a observação, constata-se que os juros auferidos e o saldo credor (montante) crescem periodicamente a uma constante, agora não mais pela diferença, mas pelo quociente entre um termo e o seu antecedente (razão = 1,10 = acréscimo 0,10 = 10%), caracterizando, assim, uma progressão geométrica, com os juros auferidos e o saldo credor crescendo de forma exponencial.

Destaca-se que o juro composto, diferentemente do juro simples, não vence a termo, permitindo, portanto, movimentações parciais (depósitos ou saques): no exemplo, se fossem resgatados \$ 110.000,00 no primeiro mês ou \$ 121.000,00 no segundo ou \$ 133.100,00 no terceiro ou \$ 146.410,00 no quarto ou \$ 161.051,00 no quinto mês, seriam produzidas as respectivas taxas efetivas periódicas de 10,00%, 21,00%, 33,10%, 46,41% e 61,051%, equivalentes (juros compostos) à taxa contratada de 10% ao mês.



No entanto, nada impede que resgates sejam efetuados em datas e valores diferentes desses cinco saldos credores (montantes), inclusive de forma parcial: a capitalização não deixaria de ser composta; pois, o fracionamento de prazo e a incidência da taxa sobre valor em data diferente e posterior à data zero, contendo juros auferidos e não sacados, é característica da capitalização composta.

Procedendo a um tratamento algébrico no comportamento da capitalização composta, e considerando a diferença entre o valor do saque e do depósito periódicos como sendo o valor da movimentação  $M$  (saque – depósito), o saldo credor como  $SD$ , o capital inicial aplicado como  $SD_0$  e os juros auferidos (a receber) como  $J$ , ao analisar o Quadro 3, tem-se o seguinte desenvolvimento e formulação:

$$J_1 = SD_0 \times i$$

$$SD_1 = SD_0 + J_1 - M_1$$

$$SD_1 = SD_0 + SD_0 \times i - M_1$$

Fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - M_1$$

$$J_2 = SD_1 \times i$$

$$SD_2 = SD_1 + J_2 - M_2$$

Substituindo  $J_2$  e fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_2 = SD_1 + SD_1 \times i - M_2$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1 + i) - M_2$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$SD_2 = [SD_0 \times (1 + i) - M_1] \times (1 + i) - M_2$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - M_1 \times (1 + i) - M_2 \quad \longrightarrow \text{caracterização de juros sobre juros}$$

Ao considerar genericamente  $SD_t$  como o saldo credor ao final de um período de ordem  $t$ , qualquer, obtém-se a fórmula genérica do montante de juros compostos, contemplando, inclusive, as movimentações (saques e depósitos):

$$SD_t = SD_0 \times (1 + i)^t - M_1 \times (1 + i)^{t-1} - M_2 \times (1 + i)^{t-2} \dots - M_t \quad [\text{XXVI}]$$

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático acima, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo credor do terceiro mês, por exemplo, reiterando que M = movimentação (saque – depósito):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,00$$

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 100.000 \times 1,10^3 - 0,00 \times 1,10^2 - 0,00 \times 1,10 - 0,00$$

$$SD_3 = 133.100,00$$

Como se percebe na aplicação, pelo surgimento do fator de capitalização  $1,10^3$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada pela incidência da taxa de juros sobre juros auferidos e não sacados. A rigor, trata-se da aplicação da fórmula do montante de juros compostos. Enfatize-se que os juros auferidos e não sacados, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo credor, são juros vencidos. Portanto, **a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não sacados é característica da capitalização composta.**

Para melhor visualizar e cotejar o comportamento da capitalização simples e composta no exemplo adotado, elabora-se o Quadro 4 e Gráfico 1, colocando-se em par os referidos regimes:

SIMPLES				COMPOSTO			
Mês	J Auferido	J Acumulado	SD Acumulado	Mês	J Auferido	J Acumulado	SD Acumulado
0			100.000,00	0			100.000,00
1	10.000,00	10.000,00	110.000,00	1	10.000,00	10.000,00	110.000,00
2	10.000,00	20.000,00	120.000,00	2	11.000,00	21.000,00	121.000,00
3	10.000,00	30.000,00	130.000,00	3	12.100,00	33.100,00	133.100,00
4	10.000,00	40.000,00	140.000,00	4	13.310,00	46.410,00	146.410,00
5	10.000,00	50.000,00	150.000,00	5	14.641,00	61.051,00	161.051,00

Quadro 4: Regimes de capitalização dos juros – Aplicação única, com resgate final

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe-se que os saldos acumulados a juros simples e compostos (montantes) para o 1º período são iguais. Isso ocorre porque o juro composto somente se caracteriza após o 1º período de capitalização; pois, primeiramente, há que haver juro, para que a taxa possa incidir sobre esse juro ou parte dele (**montante**), no período seguinte:

$$C \times (1+i \times n) = C \times (1+i)^n, \text{ quando } n = 1.$$

Graficamente, pode-se observar que os juros simples, embora com crescimento linear, para períodos de capitalização inferiores a um (fracionários) são maiores que os juros compostos, com crescimento exponencial; para período igual a um são iguais; e para períodos maiores do que um os juros compostos são superiores e, à medida que se aumenta o número de capitalizações, a diferença cresce exponencialmente.

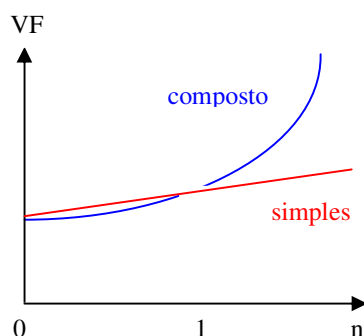


Gráfico 1: Capitalização simples *versus* composta  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe nos exemplos anteriores, quando não há saques ou depósitos em datas diferentes da data zero, a caracterização dos regimes e a diferença entre eles ficam evidentes. Entretanto, para melhor compreender o conceito dos regimes de capitalização, **não somente por meio da forma clássica**, exemplos práticos são exibidos ao longo dessa dissertação, envolvendo saques e depósitos em datas diferentes da data zero.

Considerem-se aplicações mensais e sucessivas, a partir de hoje, nos valores de \$ 50.000,00, \$ 15.000,00, \$ 3.000,00, \$ 2.000,00, \$ 1.000,00, e resgate final de \$ 110.000,00, no quinto mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros auferidos (a receber) e os saldos credores, período a período, conforme Quadro 5:

Mês	Depósitos	Juros auferidos	Saque	Saldo credor
0	50.000,00		0,00	50.000,00
1	15.000,00	5.000,00	0,00	70.000,00
2	3.000,00	7.000,00	0,00	80.000,00
3	2.000,00	8.000,00	0,00	90.000,00
4	1.000,00	9.000,00	0,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 5: Capitalização composta – Várias aplicações, com resgate final  
Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se no Quadro 5, que a taxa de juros incide sobre o saldo credor anterior, que contém juros auferidos, caracterizando a incidência de juro sobre juro, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático anterior, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo credor do terceiro mês, por exemplo, reiterando que  $M$  = movimentação (saque – depósito):

$$M_1 = - 15.000$$

$$M_2 = - 3.000$$

$$M_3 = - 2.000$$

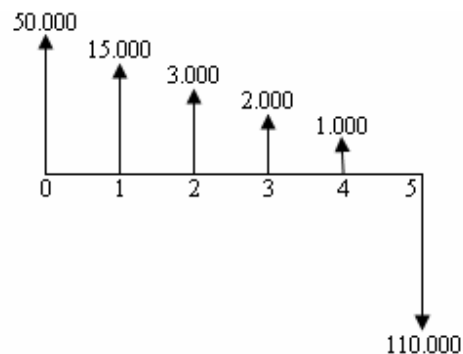
$$SD_t = SD_0 \times (1 + i)^t - M_1 \times (1 + i)^{t-1} - M_2 \times (1 + i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 50.000 \times 1,10^3 + 15.000 \times 1,10^2 + 3.000 \times 1,10 + 2.000$$

$$SD_3 = 90.000$$

Como se constata na aplicação, pelo surgimento das potências  $1,10^3$  e  $1,10^2$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros auferidos e não sacados. Enfatize-se que os juros auferidos e não sacados, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo credor, são juros vencidos. Portanto, confirma-se que a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não sacados é característica da capitalização composta.

Graficamente, o fluxo de caixa do aplicador é assim representado:



Embora seja possível determinar a taxa de retorno em qualquer dos regimes de capitalização, as calculadoras e *softwares* financeiros têm funções apropriadas para cálculo da TIR – taxa interna de retorno (IRR – *internal rate of return*) de fluxos de caixa somente no regime de juros compostos. Determinando-se a taxa efetiva do fluxo anteriormente representado, com o auxílio de calculadora financeira HP 12C<sup>3</sup>, tem-se:

f REG  
 50000 g CF<sub>0</sub>  
 15000 g CF<sub>j</sub>  
 3000 g CF<sub>j</sub>  
 2000 g CF<sub>j</sub>  
 1000 g CF<sub>j</sub>  
 110000 CHS CF<sub>j</sub>  
 f IRR      →      10%

Em razão de o fluxo de caixa ter sido armazenado mensalmente, a calculadora responderá taxa interna de retorno nesse mesmo período. Portanto, a taxa efetiva da aplicação é de 10% ao mês, idêntica à taxa contratada, ratificando tratar-se de juros compostos.

Logo, não há dúvida quanto ao regime de capitalização dos juros; porquanto, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, um valor somente não contém juro quando se encontra na data zero; o que não é o caso, uma vez que a taxa incide sobre valores nas datas um, dois, três e quatro. Além disso, a existência da capitalização composta foi cientificamente comprovada por meio do cálculo da taxa interna de retorno do fluxo de caixa do aplicador e algebricamente.

Ademais, para que as somas das aplicações atingissem, no quinto mês, um montante de \$ 110.000,00, a juros simples, os valores (depósitos) deveriam ficar aplicados à taxa de 12,037% ao mês, taxa divergente da taxa contratada, determinada por meio do *software* do Microsoft Excel, na função Ferramentas – Atingir meta, ratificando não se tratar de juros simples.

Considere-se um outro exemplo prático: aplicações mensais e sucessivas, a partir de hoje, nos valores de \$ 50.000,00, \$ 20.000,00, \$ 10.000,00, \$ 10.000,00 e \$ 10.000,00, com saques mensais e sucessivos de \$ 5.000,00, \$ 7.000,00, \$ 8.000,00, \$ 9.000,00 e \$ 110.000,00, a partir

---

<sup>3</sup> Este cálculo pode ser efetuado em qualquer calculadora ou planilha financeira.

do primeiro mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros auferidos (a receber) e os saldos credores, período a período, conforme Quadro 6:

Mês	Depósitos	Juros auferidos	Saques	Saldo credor
0	50.000,00		0,00	50.000,00
1	20.000,00	5.000,00	5.000,00	70.000,00
2	10.000,00	7.000,00	7.000,00	80.000,00
3	10.000,00	8.000,00	8.000,00	90.000,00
4	10.000,00	9.000,00	9.000,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 6: Capitalização composta – Várias aplicações, com resgates parciais.  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 6, a taxa de juros incide sobre o saldo credor anterior, que contém juros auferidos, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, a incidência de juros sobre juros pode não ser tão evidente como nos casos em que não há saques parciais, somente depósitos, como no caso anterior - Quadro 5; porquanto, **há autores que consideram que o saque, por ter valor igual ao do juro, como sendo o próprio juro, não restando, dessa forma, juro auferido no saldo credor.** Sendo assim, na opinião desses autores, a taxa incidiria sobre o saldo credor anterior, que não conteria juro auferido, transformando-se em exemplo típico de capitalização simples.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático adotado, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo do terceiro mês, por exemplo, resgatando que  $M$  = movimentação (saque – depósito):

$$M_1 = 5.000 - 20.000 = -15.000$$

$$M_2 = 7.000 - 10.000 = -3.000$$

$$M_3 = 8.000 - 10.000 = -2.000$$

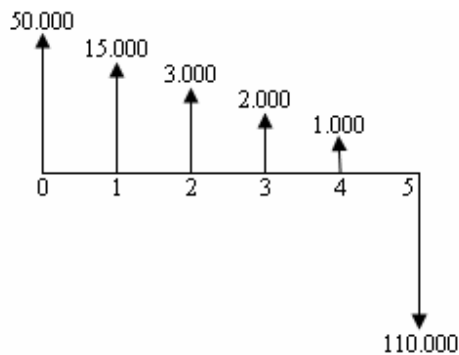
$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 50.000 \times 1,10^3 + 15.000 \times 1,10^2 + 3.000 \times 1,10 + 2.000$$

$$SD_3 = 90.000$$

Como se constata, pelo surgimento das potências  $1,10^3$  e  $1,10^2$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros auferidos e não sacados. Enfatize-se que os juros auferidos e não sacados, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo credor, são juros vencidos. Portanto, ratifica-se que a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não sacados é característica da capitalização composta.

Graficamente, o fluxo de caixa do aplicador é assim representado:



Destaque-se que o fluxo de caixa do aplicador é exatamente o mesmo do exemplo anterior, em que a capitalização composta mostrou-se evidente; portanto, a taxa efetiva mensal, obtida por meio da referida calculadora, que somente determina a taxa na capitalização composta, é de 10%, idêntica à taxa contratada, ratificando tratar-se de juros compostos.

Não há, portanto, como admitir que se trate de capitalização simples, aceitando os argumentos de que os juros auferidos foram sacados e a taxa estaria incidindo sobre o capital inicial aplicado. A taxa somente incidiria sobre o capital inicial aplicado se os depósitos e saques fossem simplesmente ignorados e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, **um valor somente não contém juro quando se encontra na data zero**; o que não é o caso, uma vez que taxa de juros incide sobre valores nas datas um, dois, três e quatro. Além disso, a existência da capitalização composta foi cientificamente comprovada por meio do cálculo da taxa interna de retorno do fluxo de caixa do aplicador e algebricamente.

Pode-se inferir, então, que **os saques**, embora por alguns autores denominados juros, **são efetivamente montantes, restando montantes como saldo credor**; pois, a capitalização composta, diferentemente da simples, não vence a termo, ou seja, admite fracionamento de prazo, exigindo mais de um período de capitalização. O saque somente se caracteriza como juro quando

há resgate total da aplicação (capital inicial aplicado + juros auferidos totais = saldo credor), no final de um único período de capitalização, caracterizando única operação.

Conclui-se, por conseguinte, que se a taxa incidir sobre saldos remanescentes, como é o caso dos saldos credores nas datas um, dois, três e quatro, a capitalização é composta; pois, esses **saldos remanescentes se encontram em datas posteriores à data zero e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez (valor do dinheiro no tempo), contêm juros**. Saliente-se que, mesmo havendo saques de valores iguais aos juros ou mesmo superiores, a capitalização composta fica caracterizada pela incidência da taxa de juros sobre saldos remanescentes que, por estarem em datas diferentes à data zero, conterão juros.

Ademais, para que a soma dos montantes das movimentações (saque – depósitos) atingissem \$ 110.000,00, no quinto mês, as movimentações deveriam ser aplicadas a juros simples de 12,037% ao mês, taxa divergente da taxa contratada, determinada por meio do *software* do Microsoft Excel, na função Ferramentas – Atingir meta, ratificando não se tratar de juros simples.

Considere-se outro exemplo prático: aplicação de R\$ 100.000,00, com saques de \$ 33.100,00 e \$ 10.000,00 no terceiro e quarto meses, respectivamente, e resgate total de \$ 110.000,00, no quinto mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros auferidos (a receber) e os saldos credores (montantes), período a período, conforme Quadro 7:

Mês	Depósito	Juros auferidos	Saques	Saldo credor
0	100.000,00		0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	11.000,00	0,00	121.000,00
3	0,00	12.100,00	33.100,00	100.000,00
4	0,00	10.000,00	10.000,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 7: Capitalização composta – Aplicação única, com resgates parciais  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 7, a taxa de juros incide sobre o saldo credor anterior, que contém juros auferidos, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, a incidência de juros sobre juros pode não ser tão evidente como nos casos em que não há saques parciais, somente depósitos; porquanto, há autores que consideram que o saque, por ter valor igual ou superior ao do juro, como sendo o próprio juro e a sobra como



capital inicial aplicado ou parte, não restando, dessa forma, juros auferidos no saldo credor. Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo credor anterior, que não conteria juro auferido, transformando-se em exemplo típico de capitalização simples.

Considerando que no primeiro e segundo meses não houve saques, os juros auferidos aparecem de forma evidente no saldo credor, não ensejando dúvidas com relação à capitalização composta: pode-se imaginar, então, que se está defronte de um regime de capitalização híbrido?

Para comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático acima, aplique-se a fórmula genérica de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo credor do quarto mês, por exemplo, resgatando que M = movimentação (saque – depósito):

$$M_3 = 33.100$$

$$M_4 = 10.000$$

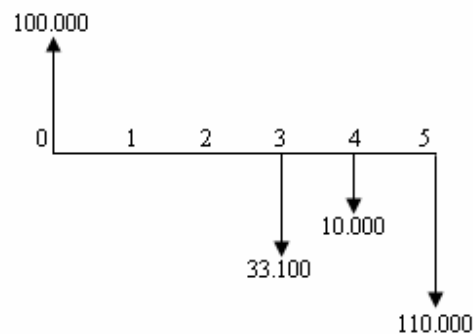
$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_4 = 100.000 \times \mathbf{1,10^4} - 33.100 \times 1,10 - 10.000$$

$$SD_4 = 100.000$$

Como se constata na aplicação, pelo surgimento da potência  $\mathbf{1,10^4}$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros auferidos e não sacados. Enfatize-se que os juros auferidos e não sacados, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo credor, são juros vencidos, e a incidência da taxa sobre esses juros, é característica da capitalização composta.

Graficamente, o fluxo de caixa do aplicador é assim representado:



Determinando-se a taxa efetiva do fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira HP 12C, que somente calcula a taxa na capitalização composta, tem-se:

f REG  
 100000 CHS g CF<sub>0</sub>  
 0 g CF<sub>j</sub>  
 2 g N<sub>j</sub>  
 33.100 g CF<sub>j</sub>  
 10000 g CF<sub>j</sub>  
 110000 g CF<sub>j</sub>  
 f IRR → 10%

Em razão de o fluxo de caixa ter sido armazenado mensalmente, a calculadora responderá uma TIR nesse mesmo período. Portanto, a taxa efetiva da aplicação é de 10% ao mês, idêntica à taxa contratada, ratificando tratar-se de juros compostos.

Pode-se inferir, então, que os saques, embora por alguns autores denominados juros, são efetivamente montantes, restando montantes como saldo credor; pois, a capitalização composta, diferentemente da simples, não vence a termo, ou seja, admite fracionamento de prazo, exigindo mais de um período de capitalização. O saque somente se caracteriza como juro quando há resgate total da aplicação (capital inicial aplicado + juros auferidos totais = saldo credor), no final de um único período de capitalização, caracterizando uma única operação.

Conclui-se, por conseguinte, que, se a taxa incidir sobre saldos remanescentes, como é o caso dos saldos credores nas datas um, dois, três e quatro, a capitalização é composta; pois, os referidos saldos se encontram em datas posteriores à data zero e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, têm valores diferentes no tempo e, por conseguinte, contêm juros.

As capitalizações simples e composta são mutuamente excludentes, não sendo conceitualmente admissível sistema híbrido. Não há, portanto, como admitir que se trate de capitalização composta até à data três, porque a taxa de juros incide sobre saldos credores que contêm juros auferidos (montantes), e capitalização simples da data três até à data cinco, porque os juros auferidos foram sacados e a taxa estaria incidindo somente sobre o capital inicial

aplicado. A alegação da existência de capitalização simples não se sustenta; pois, a taxa somente incidiria sobre o capital inicial aplicado (data zero) se os saques fossem simplesmente ignorados.

Logo, não há dúvida quanto ao regime de capitalização dos juros; porquanto, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, um valor somente não contém juro quando se encontra na data zero; o que não é o caso, uma vez que a taxa incide sobre valores nas datas um, dois, três e quatro. Além disso, a existência da capitalização composta foi cientificamente comprovada por meio do cálculo da taxa interna de retorno do fluxo de caixa do aplicador e algebricamente.

Ademais, para que uma aplicação de R\$ 100.000,00, na data zero, seja equivalente a saques de \$ 33.100,00, \$ 10.000,00 e \$ 110.000,00, no terceiro, quarto e quinto mês, respectivamente, somente se for efetivada a juros simples de 12,529% ao mês, taxa divergente da taxa contratada, determinada por meio do *software* do Microsoft Excel, na função Ferramentas – Atingir meta, ratificando não se tratar de juros simples.

#### 4.2.4 Empréstimo de dinheiro

O cálculo dos juros e do saldo devedor em operações de empréstimos é semelhante ao cálculo nas operações de aplicação de dinheiro. Nesse item, empréstimo de dinheiro, são apresentados raciocínios análogos ao do item anterior, aplicação de dinheiro; porém, sob a ótica do tomador de empréstimo.

Na capitalização simples, na forma clássica, para efeito de comparações, volta-se a adotar exemplo com as mesmas características: empréstimo de R\$ 100.000,00, para liquidação no final de cinco meses, à taxa de 10% ao mês, em que são determinados os juros devidos e os saldos devedores (montantes), período a período, conforme Quadro 8:

Mês	Liberações	Juros devidos	Pagamentos	Saldo devedor
0	100.000,00	0,00	0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	10.000,00	0,00	120.000,00
3	0,00	10.000,00	0,00	130.000,00
4	0,00	10.000,00	0,00	140.000,00
5	0,00	10.000,00	150.000,00	0,00

Quadro 8: Capitalização simples – Liberação única, com pagamento final  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se constata, o Quadro 8 é idêntico ao Quadro 2, referente à aplicação de dinheiro, exceto a nomenclatura das colunas. Verifica-se que a taxa de juros incide sempre sobre o capital

inicial emprestado, descaracterizando a incidência de juro sobre juro. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro simples.

Como a taxa de juros de 10% ao mês incide sempre sobre a mesma base (simples), capital inicial emprestado, o juro devido em cada período é constante e, por conseqüência, o saldo devedor cresce periodicamente a essa constante, caracterizando crescimento linear conforme uma progressão aritmética, da mesma forma ao visto no Quadro 2.

Observe-se que o juro simples vence a termo, exigindo um único período de capitalização e não permite, portanto, movimentações parciais (liberações e pagamentos); pois, caso houvesse, a taxa teria que incidir sobre valor diferente do capital inicial emprestado ou as movimentações teriam que ser ignoradas: no exemplo, embora o cálculo seja efetivado periodicamente, o empréstimo somente poderia ser liquidado por \$ 110.000,00 no primeiro mês ou \$ 120.000,00 no segundo ou \$ 130.000,00 no terceiro ou \$ 140.000,00 no quarto ou \$ 150.000,00 no quinto mês, produzindo as respectivas taxas efetivas periódicas de pagamento de 10%, 20%, 30%, 40% e 50%, proporcionais (juros simples) à taxa contratada de 10% ao mês.

Qualquer pagamento diferente desses cinco saldos devedores (montantes) ou da liquidação total do empréstimo em um único pagamento, a capitalização deixaria de ser simples; pois haveria fracionamento de prazo e a taxa incidiria sobre outro valor que não o capital inicial emprestado, valor este em data posterior à data zero, contendo juros. Enfatize-se: capital inicial emprestado é somente aquele valor que se encontra na data zero, única data em que um valor não contém juro, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez (valor do dinheiro no tempo).

No entanto, nada impede que os juros simples sejam calculados periodicamente, mas sempre sobre o capital inicial emprestado. Contudo, para não caracterizar o fracionamento de prazo, é imprescindível que o pagamento seja único, correspondente ao somatório do capital inicial emprestado e o total de juros simples devidos (saldo devedor) até a data da liquidação do empréstimo, caracterizando uma única operação. Portanto, é característica da capitalização simples não admitir que juros devidos (vencidos) e não pagos façam parte do saldo devedor, para exigir juros nos períodos seguintes.

Procedendo a um tratamento algébrico no comportamento da capitalização simples, e considerando o saldo devedor como  $SD$ , o capital inicial emprestado como  $SD_0$  e os juros devidos como  $J$ , ao analisar o Quadro 8, tem-se o desenvolvimento e formulação idênticos ao visto na aplicação de dinheiro.

Ao considerar genericamente  $SD_t$  como o saldo devedor ao final de um período de ordem  $t$ , qualquer, obtém-se fórmula idêntica à do saldo credor; a rigor, fórmula para obtenção do montante de juros simples [III], calculado sobre o valor da aplicação ou do empréstimo:  $SD_t = SD_0 \times (1 + i t)$ .

Reiterando, porém sob o enfoque de empréstimo, a literatura tem conceituado e exemplificado a capitalização composta apenas de forma clássica, definindo que nesse regime de capitalização os juros devidos de cada período são sempre calculados sobre o capital inicial emprestado acrescido dos juros devidos até o período anterior (saldo devedor), e incorporados a esse saldo devedor, para exigir novos juros devidos nos períodos seguintes.

Para melhor visualização e entendimento da capitalização composta, na forma clássica, e poder comparar com a capitalização simples, o mesmo exemplo será adotado, de um empréstimo de R\$ 100.000,00, para liquidação no final de cinco meses, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros devidos e os saldos devedores (montantes), período a período, conforme Quadro 9:

Mês	Liberações	Juros devidos	Pagamentos	Saldo devedor
0	100.000,00	0,00	0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	11.000,00	0,00	121.000,00
3	0,00	12.100,00	0,00	133.100,00
4	0,00	13.310,00	0,00	146.410,00
5	0,00	14.641,00	161.051,00	0,00

Quadro 9: Capitalização composta – Liberação única, com pagamento final  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se constata, o Quadro 9 é idêntico ao Quadro 3, referente à aplicação de dinheiro, exceto a nomenclatura das colunas. Verifica-se que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior (montante), que contém juros devidos, caracterizando a incidência de juro sobre juro, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Como a taxa de juros incide não somente sobre o capital inicial emprestado, mas também sobre os juros devidos nos períodos anteriores (saldo devedor), os juros devidos em cada período são crescentes, caracterizando uma progressão geométrica, com os juros devidos do período e o saldo devedor (montante) crescendo de forma exponencial, idêntico ao visto no Quadro 3.

Observe-se que o juro composto não vence a termo, permitindo, portanto, movimentações parciais (liberações e pagamentos): no exemplo, se fossem pagos \$ 110.000,00 no primeiro mês ou \$ 121.000,00 no segundo ou \$ 133.100,00 no terceiro ou \$ 146.410,00 no quarto ou \$ 161.051,00 no quinto mês, seriam produzidas as respectivas taxas efetivas periódicas de 10,00%, 21,00%, 33,10%, 46,41% e 61,051%, equivalentes (compostos) à taxa contratada de 10% ao mês.

No entanto, nada impede que pagamentos sejam efetuados em datas e valores diferentes desses cinco saldos devedores (montantes): a capitalização não deixaria de ser composta; pois, o fracionamento de prazo e a incidência da taxa sobre valor em data diferente e posterior à data zero, contendo juros devidos (vencidos) e não pagos, é característica da capitalização composta.

Procedendo a um tratamento algébrico no comportamento da capitalização composta, e considerando a diferença entre o valor do pagamento e da liberação como sendo o valor da movimentação ( $M = \text{pagamento} - \text{liberação}$ ), o saldo devedor como  $SD$ , o capital inicial emprestado como  $SD_0$  e os juros devidos como  $J$ , ao analisar o Quadro 9, tem-se o desenvolvimento e formulação idênticos ao da aplicação de dinheiro.

Ao considerar-se genericamente  $SD_t$  como o saldo devedor ao final de um período de ordem  $t$ , qualquer, ratifica-se a obtenção da fórmula genérica de juros compostos, contemplando liberações e pagamentos:

$$SD_t = SD_0 \times (1 + i)^t - M_1 \times (1 + i)^{t-1} - M_2 \times (1 + i)^{t-2} \dots - M_t$$

Observe-se que a fórmula genérica de juros compostos quando envolve liberações e pagamentos - EMPRÉSTIMO DE DINHEIRO (amortização) é idêntica à fórmula genérica de juros compostos quando envolve depósitos e saques - APLICAÇÃO DE DINHEIRO (capitalização) [XXVI]. Portanto, ao utilizar a mesma fórmula para obtenção do saldo (credor e devedor) na aplicação e no empréstimo, conclui-se que **capitalização e amortização não são incompatíveis e sim convergentes**; porquanto a incidência de juros sobre juros ocorre tanto na APLICAÇÃO como no EMPRÉSTIMO, sobre os saldos credores e sobre os saldos devedores, respectivamente, como se comprova e demonstra cientificamente.

Para comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no referido exemplo prático, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo devedor do terceiro mês, por exemplo, resgatando que  $M = \text{movimentação (pagamento - liberação)}$ :

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,00$$

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 100.000 \times 1,10^3 + 0,00 \times 1,10^2 + 0,00 \times 1,10$$

$$SD_3 = 133.100,00$$

Como se percebe, pelo surgimento da potência  $1,10^3$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros devidos e não pagos, os quais, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo devedor, são juros vencidos. Portanto, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos é característica da capitalização composta.

Para melhor visualizar, compreender e cotejar o comportamento da capitalização simples e composta no exemplo comum adotado, como são idênticos aos elaborados na aplicação de dinheiro, observe-se o Quadro 4 e o Gráfico 1, em que foram colocados em par os regimes, substituindo-se, no título, juros auferidos por juros devidos.

Como se constata nos exemplos anteriores, quando não há pagamentos ou liberações em datas diferentes da data zero, a caracterização e a diferença entre os regimes ficam evidentes. Entretanto, para melhor esclarecer o conceito dos regimes de capitalização, não somente por meio da forma clássica, exemplos práticos serão adotados, envolvendo liberações e pagamentos em datas diferentes da data zero.

Considere-se um empréstimo com liberações mensais e sucessivas, a partir de hoje, nos valores de \$ 50.000,00, \$ 15.000,00, \$ 3.000,00, \$ 2.000,00, \$ 1.000,00, para liquidação no quinto mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros devidos e os saldos devedores (montantes), período a período, conforme Quadro 10:

Mês	Liberações	Juros devidos	Pagamentos	Saldo devedor
0	50.000,00		0,00	50.000,00
1	15.000,00	5.000,00	0,00	70.000,00
2	3.000,00	7.000,00	0,00	80.000,00
3	2.000,00	8.000,00	0,00	90.000,00
4	1.000,00	9.000,00	0,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 10: Capitalização composta – Várias liberações, com pagamento final.  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa, o Quadro 10 é idêntico ao Quadro 5, referente à aplicação de dinheiro, exceto a nomenclatura das colunas. Verifica-se que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos, caracterizando a incidência de juro sobre juro, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros no exemplo prático, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo devedor do terceiro mês, por exemplo. Reitere-se: M = movimentação (pagamento – liberação):

$$M_1 = - 15.000$$

$$M_2 = - 3.000$$

$$M_3 = - 2.000$$

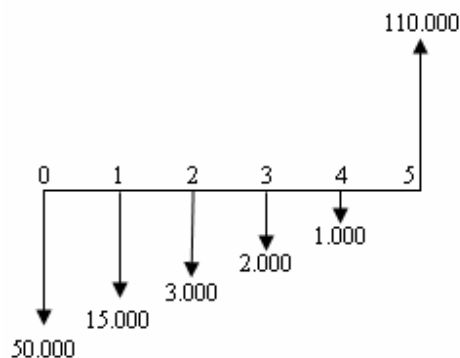
$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 50.000 \times 1,10^3 + 15.000 \times 1,10^2 + 3.000 \times 1,10 + 2.000$$

$$SD_3 = 90.000$$

Como se percebe no referido empréstimo, pelo surgimento das potências  $1,10^3$  e  $1,10^2$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada, pela incidência da taxa de juros sobre juros devidos e não pagos. Enfatize-se que os juros devidos e não pagos são juros vencidos. Portanto, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos é característica da capitalização composta.

O raciocínio é análogo ao realizado para as aplicações com depósitos distintos e um único saque no resgate. A única diferença está no sentido das setas que representam as entradas e saídas de caixa do tomador do empréstimo, como se visualiza a seguir:





O fluxo de caixa é idêntico ao originado na aplicação de dinheiro. Por conseguinte, as análises e conclusões são análogas.

Sendo assim, a capitalização composta está comprovada, por meio da incidência da taxa de juros sobre valor que contém juros, por se situar em data posterior à data zero; pelo surgimento do fator de capitalização composta no cálculo algébrico do saldo devedor e pela obtenção da taxa de juros compostos de 10% ao mês, idêntica à contratada; porquanto a taxa de juros simples é de 12,037% ao mês.

Considere-se outro exemplo prático, novamente substituindo a aplicação por um empréstimo: liberações mensais e sucessivas, a partir de hoje, nos valores de \$ 50.000,00, \$ 20.000,00, \$ 10.000,00, \$ 10.000,00, \$ 10.000,00, com pagamentos mensais e sucessivos de \$ 5.000,00, \$ 7.000,00, \$ 8.000,00, \$ 9.000,00, a partir do primeiro mês, e liquidação total com pagamento de \$ 110.000,00, no quinto mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros devidos e os saldos devedores, período a período, conforme Quadro 11:

Mês	Liberações	Juros devidos	Pagamentos	Saldo devedor
0	50.000,00		0,00	50.000,00
1	20.000,00	5.000,00	5.000,00	70.000,00
2	10.000,00	7.000,00	7.000,00	80.000,00
3	10.000,00	8.000,00	8.000,00	90.000,00
4	10.000,00	9.000,00	9.000,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 11: Capitalização composta – Várias liberações, com pagamentos parciais.

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa, o Quadro 11 é idêntico ao Quadro 6, referente à aplicação de dinheiro, exceto a nomenclatura das colunas. Verifica-se que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, a incidência de juros sobre juros pode não ser tão evidente como nos casos em que não há pagamentos parciais, somente liberações, como no caso anterior - Quadro 10; porquanto, **há autores que consideram que o pagamento, por ter valor igual ao do juro, como sendo o próprio juro, não restando, dessa forma, juro devido no saldo devedor.** Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido, exemplo típico de capitalização simples.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático anterior, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo devedor do terceiro mês, por exemplo, resgatando que  $M$  = movimentação (pagamento – liberação):

$$M_1 = 5.000 - 20.000 = -15.000$$

$$M_2 = 7.000 - 10.000 = -3.000$$

$$M_3 = 8.000 - 10.000 = -2.000$$

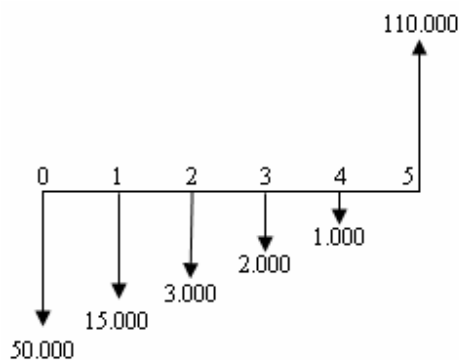
$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_3 = 50.000 \times 1,10^3 + 15.000 \times 1,10^2 + 3.000 \times 1,10 + 2.000$$

$$SD_3 = 90.000$$

Como se percebe no referido empréstimo, pelo surgimento das potências  $1,10^3$  e  $1,10^2$  na determinação do  $SD_3$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros devidos e não pagos que, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo devedor, são juros vencidos. Portanto, confirma-se, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos é característica da capitalização composta.

O raciocínio é análogo ao realizado para as aplicações com depósitos e saques distintos. A única diferença está no sentido das setas que representam as entradas e saídas de caixa do tomador do empréstimo, como se visualiza a seguir:



O fluxo de caixa é idêntico ao originado na aplicação de dinheiro. Por conseguinte, as análises e conclusões são análogas.

Da mesma forma que na aplicação de dinheiro, não há como admitir que se trate de capitalização simples, aceitando os argumentos de que os juros foram pagos e a taxa estaria incidindo sobre o capital inicial emprestado. A taxa somente incidiria sobre o capital inicial emprestado se os pagamentos e as liberações fossem simplesmente ignorados.

Por conseguinte, a capitalização composta está comprovada, por meio da incidência da taxa de juros sobre valor que contém juros, por se situar em data posterior à data zero; pelo surgimento do fator de capitalização composta no cálculo algébrico do saldo devedor e pela obtenção da taxa de juros compostos de 10% ao mês, idêntica à contratada; porquanto a taxa de juros simples é de 12,037% ao mês.

Considere-se outro exemplo prático, novamente substituindo a aplicação por um empréstimo: R\$ 100.000,00 com pagamentos de \$ 33.100,00 e \$ 10.000,00 no terceiro e quarto meses, respectivamente, e liquidação total por meio de pagamento de \$ 110.000,00, no final do quinto mês, à taxa contratada de 10% ao mês, em que são determinados os juros devidos e os saldos devedores, período a período, conforme Quadro 12:

Mês	Liberações	Juros devidos	Pagamentos	Saldo devedor
0	100.000,00		0,00	100.000,00
1	0,00	10.000,00	0,00	110.000,00
2	0,00	11.000,00	0,00	121.000,00
3	0,00	12.100,00	33.100,00	100.000,00
4	0,00	10.000,00	10.000,00	100.000,00
5	0,00	10.000,00	110.000,00	0,00

Quadro 12: Capitalização composta - Liberação única, com pagamentos parciais  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa, o Quadro 12 é idêntico ao Quadro 7, referente à aplicação de dinheiro, exceto a nomenclatura das colunas. Verifica-se que a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos, exceto quando na data zero. Em razão da evidência, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, a incidência de juros sobre juros pode não ser tão evidente como nos casos em que não há pagamentos parciais, somente liberações; porquanto, há autores que consideram que o pagamento, por ter valor igual ou superior ao do juro, como sendo o próprio juro e a sobra como capital inicial emprestado ou parte, não restando, dessa forma, juros no saldo devedor. Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido, exemplo típico de capitalização simples.

Considerando que no primeiro e segundo meses não houve pagamentos, os juros aparecem de forma evidente no saldo devedor, não ensejando dúvidas com relação à capitalização composta: pode-se imaginar, então, que se está defronte de um regime de capitalização híbrido?

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no referido empréstimo, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVI] para a obtenção do saldo devedor do quarto mês, por exemplo, resgatando que  $M$  = movimentação (pagamento – liberações):

$$M_3 = 33.100$$

$$M_4 = 10.000$$

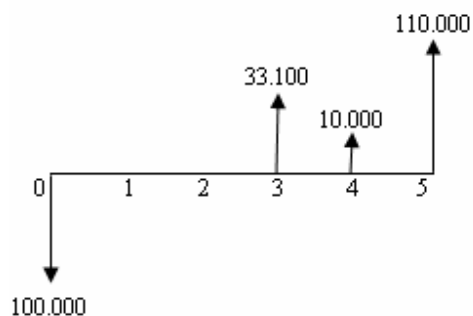
$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - M_1 \times (1+i)^{t-1} - M_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - M_t$$

$$SD_4 = 100.000 \times 1,10^4 - 33.100 \times 1,10 - 10.000$$

$$SD_4 = 100.000$$

Como se percebe, pelo surgimento das potências  $1,10^4$ , na determinação do  $SD_4$ , a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros devidos e não pagos.

O raciocínio é análogo ao realizado para as aplicações com uma única liberação inicial e saques distintos. A única diferença está no sentido das setas que representam as entradas e saídas de caixa do tomador do empréstimo, como se visualiza a seguir:



O fluxo de caixa é idêntico ao originado na aplicação de dinheiro. Por conseguinte, as análises e conclusões são análogas.

Da mesma forma, não há como admitir que se trate de capitalização composta até a data três, porque a taxa incide sobre os saldos devedores (montantes) e capitalização simples da data três até a data cinco, porque os juros devidos foram pagos e a taxa estaria incidindo sobre o capital inicial emprestado. As capitalizações simples e composta são mutuamente excludentes. A alegação de existência de capitalização simples não se sustenta; pois, a taxa somente incidiria sobre o capital inicial emprestado (data zero) se os pagamentos fossem simplesmente ignorados.

Por conseguinte, a capitalização composta está comprovada, pela incidência da taxa de juros sobre valor que contém juros, por se situar em data posterior à data zero; pelo surgimento do fator de capitalização composta no cálculo algébrico do saldo devedor e pela obtenção da taxa de juros compostos de 10% ao mês, idêntica à contratada; porquanto a taxa de juros simples é de 12,529% ao mês.

No próximo capítulo estão apresentadas as análises dos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira: Price e SAC, e o respectivo regime de capitalização dos juros nos referidos sistemas.

## 5. ANÁLISE DOS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO Price e SAC

Entendidos os regimes de capitalização dos juros e a equivalência de capitais e de fluxos de caixa, constroem-se as análises para comprovação dos regimes de capitalização dos juros nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira: Price e SAC.

As diversas formas de se liquidar empréstimos são denominadas sistemas de amortização, desenvolvidos, normalmente, para liquidação de operações de longo prazo, em pagamentos periódicos, com os juros sendo calculados por meio da incidência da taxa sobre o saldo devedor do período anterior. A caracterização se dá por meio da elaboração de planilha de amortização, em que se demonstra com exatidão como um empréstimo será restituído, discriminando o valor dos pagamentos e respectivas datas, separando a parcela de capital (amortização) e encargos financeiros (juros), bem como o saldo devedor, após cada pagamento.

A forma de se liquidar uma dívida, que são os sistemas de amortização, tem que estar com as condições explícitas em contrato entre credor e devedor, e é condição *sine qua non* que os pagamentos periódicos sejam financeiramente equivalentes ao valor da dívida, descontados à taxa de juro do empréstimo.

### 5.1 SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO – Tabela Price

A denominação Price ao sistema de amortização que tem como principal característica a liquidação de empréstimos por meio de prestações constantes e periódicas se deve ao escritor inglês Richard Price (1803, p. 262-285) que, por meio da publicação das Tabelas de Juro Composto em seu livro intitulado *Observations on Reversionary Payments*, apresentou coeficientes de 1 a 100 períodos (anos), com taxas variando de 2% a 10% ao ano, para o cálculo do valor presente e valor futuro de um único valor e de séries uniformes de pagamentos; portanto, quatro tabelas.

Não há, na referida obra, qualquer menção em separar, no valor da prestação, o valor relativo aos juros e à amortização. Entretanto, essa separação é de vital importância para atender às necessidades jurídico-fisco-contábeis, em razão de os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, produzirem efeitos fiscais, tornando-se fundamento para decisão de investimentos.

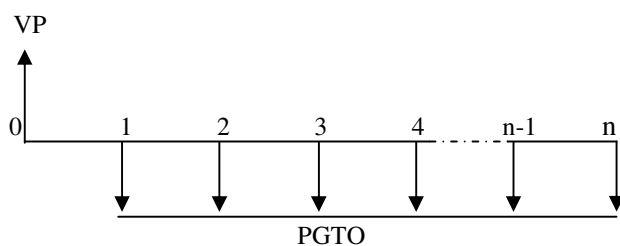
Esse sistema foi desenvolvido para liquidação de operações por meio de pagamentos periódicos, iguais e sucessivos, resultado do somatório da parcela de capital (amortização) e

encargos financeiros (juros), os quais são determinados pela incidência da taxa efetiva periódica sobre o saldo devedor do período anterior. No Brasil, no Sistema Financeiro de Habitação – SFH, como em todos os repasses do Governo Federal, a taxa é apresentada no formato nominal, normalmente em ano, com os juros sendo capitalizados mensalmente, de acordo com o período das parcelas. O valor da amortização, por conseguinte, é obtido pela diferença entre a prestação e os juros do período, e o saldo devedor pela diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período.

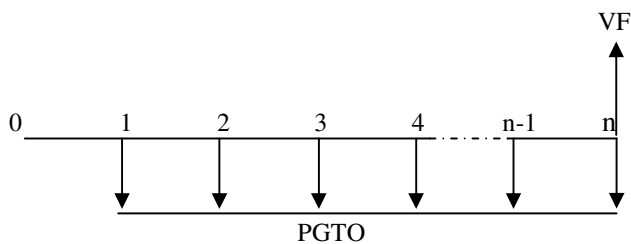
É característica desse Sistema, portanto, que no início da liquidação do empréstimo o valor dos juros seja a maior parte componente da prestação, diminuindo à medida que o saldo devedor decresce com o pagamento das parcelas. Com o valor da amortização ocorre o inverso, sendo menor no início, aumentando geometricamente a cada período, à medida que os saldos devedores e respectivos juros vão decrescendo.

Para melhor clareza, tome-se como exemplo um empréstimo de valor igual a **VP** (valor presente), que será liquidado em **n** prestações periódicas e iguais, com a primeira sendo paga no final do primeiro período, postecipada, a uma taxa de juros **i** por período igual ao das parcelas, e determine-se a prestação (PGTO), para elaboração da planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



Se determinado em função do valor futuro, pode ser assim representado:



Observe-se que esse fluxo está de acordo com o fluxo de caixa modelo-padrão, sendo, por isso, uma série postecipada, em que o valor presente ocorre um período antes da primeira parcela e o valor futuro na mesma data da última. Assim, o valor das parcelas (PGTO) é obtido a partir das fórmulas do modelo-padrão, em função do valor presente [X] ou do valor futuro [XII], ou, ainda, por meio das Tabelas de Juro Composto – Price.

Depois de determinado o valor das parcelas constantes, e obedecendo as características do sistema, a planilha de amortização tradicionalmente é elaborada, conforme Quadro 13:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				VP = SD <sub>0</sub>
1	PGTO <sub>1</sub>	J <sub>1</sub> = SD <sub>0</sub> x i	A <sub>1</sub> = PGTO <sub>1</sub> - J <sub>1</sub>	SD <sub>1</sub> = SD <sub>0</sub> - A <sub>1</sub>
2	PGTO <sub>2</sub>	J <sub>2</sub> = SD <sub>1</sub> x i	A <sub>2</sub> = PGTO <sub>2</sub> - J <sub>2</sub>	SD <sub>2</sub> = SD <sub>1</sub> - A <sub>2</sub>
3	PGTO <sub>3</sub>	J <sub>3</sub> = SD <sub>2</sub> x i	A <sub>3</sub> = PGTO <sub>3</sub> - J <sub>3</sub>	SD <sub>3</sub> = SD <sub>2</sub> - A <sub>3</sub>
k	PGTO <sub>k</sub>	J <sub>k</sub> = SD <sub>k-1</sub> x i	A <sub>k</sub> = PGTO <sub>k</sub> - J <sub>k</sub>	SD <sub>k</sub> = SD <sub>k-1</sub> - A <sub>k</sub>
n	PGTO <sub>n</sub>	J <sub>n</sub> = SD <sub>n-1</sub> x i	A <sub>n</sub> = PGTO <sub>n</sub> - J <sub>n</sub>	SD <sub>n</sub> = SD <sub>n-1</sub> - A <sub>n</sub>

Quadro 13: Tabela Price – Planilha-formulário

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa na planilha de amortização do Sistema Price, constante do Quadro 13, ao final do 1º período são devidos juros à taxa  $i$ , que incidirá sobre o saldo devedor anterior, igual ao valor do empréstimo  $VP = SD_0$  (saldo devedor na data zero), a saber:

$$J_1 = SD_0 \times i$$

O pagamento da primeira prestação liquidará esse juro ( $J_1$ ) e amortizará a diferença ( $A_1$ ):

$$A_1 = PGTO_1 - J_1$$

Substituindo  $J_1$ , tem-se:

$$A_1 = PGTO_1 - SD_0 \times i$$

Conseqüentemente, o saldo devedor ( $SD_1$ ), ficará reduzido a:

$$SD_1 = SD_0 - A_1$$

Substituindo  $A_1$ , tem-se:

$$SD_1 = SD_0 - (PGTO_1 - SD_0 \times i)$$

$$SD_1 = SD_0 - PGTO_1 + SD_0 \times i$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$



Ao final do 2º período, sobre esse  $SD_1$ , serão exigidos novos juros:

$$J_2 = SD_1 \times i$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$J_2 = [SD_0 \times (1+i) - PGTO_1] \times i$$

$$J_2 = SD_0 \times (1+i) \times i - PGTO_1 \times i$$

$$J_2 = SD_0 \times i + \mathbf{SD_0 \times i^2} - PGTO_1 \times i \longrightarrow \text{caracterização do juro composto}$$

A capitalização composta está caracterizada por meio do surgimento de  $i^2$ , resultado da incidência de **juros sobre os juros** existentes no saldo devedor anterior, devidos (vencidos) e não pagos. Destaque-se que os juros serão totalmente liquidados somente quando o empréstimo for totalmente liquidado, por meio do pagamento do capital inicial emprestado mais os juros devidos totais, no final de um único período de capitalização, caracterizando uma única operação. Caso contrário, haverá juros devidos (vencidos) e não pagos no saldo devedor; pois **os pagamentos são feitos sempre em montantes (parcela de capital mais juros), restando montantes como saldos devedores**. Essa relação é aplicável a qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre o saldo devedor.

O pagamento da segunda prestação liquidará o juro ( $J_2$ ) e amortizará a diferença ( $A_2$ ):

$$A_2 = PGTO_2 - J_2$$

Substituindo  $J_2$ , tem-se:

$$A_2 = PGTO_2 - [SD_0 \times i + SD_0 \times i^2 - PGTO_1 \times i]$$

$$A_2 = PGTO_2 - SD_0 \times i - SD_0 \times i^2 + PGTO_1 \times i$$

Considerando que  $PGTO_2 = PGTO_1$  e procedendo-se às devidas fatorações, obtém-se:

$$A_2 = PGTO (1+i) - SD_0 \times i \times (1+i)$$

$$A_2 = (PGTO - SD_0 \times i) \times (1+i)$$

Utilizando a igualdade  $A_1 = PGTO_1 - SD_0 \times i$ , obtém-se:

$$A_2 = A_1 \times (1+i)$$

Ao se considerar genericamente  $SD_{t-1}$  como o saldo devedor no final de um período  $t-1$ , sobre esse saldo devedor, ao final do período de ordem  $t$  qualquer, serão exigidos juros ( $J_t$ ):

$$J_t = SD_{t-1} \times i$$

O pagamento da prestação de ordem t liquidará esses juros e amortizará a diferença:

$$A_t = PGTO_t - J_t$$

Substituindo  $J_t$ , tem-se:

$$A_t = PGTO_t - SD_{t-1} \times i$$

Conseqüentemente, o saldo devedor  $SD_t$  ficará reduzido a:

$$SD_t = SD_{t-1} - A_t$$

Substituindo  $A_t$ , tem-se:

$$SD_t = SD_{t-1} - (PGTO_t - SD_{t-1} \times i)$$

$$SD_t = SD_{t-1} - PGTO_t + SD_{t-1} \times i$$

Fatorando  $SD_{t-1}$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_t = SD_{t-1} \times (1 + i) - PGTO_t \quad [XXVII]$$

Dessa forma, constata-se que o saldo devedor de um período qualquer independe do valor do juro e da amortização. Isso quer dizer que **o juro e a amortização podem tomar qualquer valor**, desde que a sua soma seja igual ao valor da prestação do período e o total das amortizações seja igual ao valor do empréstimo, **pois, não altera o valor do fluxo de pagamentos e do saldo devedor**. Essa relação é aplicável a qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre o saldo devedor.

Logo, a incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior para se determinar os juros do período e a amortização pela diferença deste com o valor da prestação são meras convenções adotadas pelos idealizadores dos sistemas; porquanto, a Matemática financeira considera o valor do empréstimo e as prestações para liquidá-lo, entradas e saídas do fluxo de caixa, não importando se a título de juros ou de amortização.

Portanto, em qualquer período, **o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior acrescido do juro do período e subtraído da prestação**. Considerando que o saldo devedor inicial ( $SD_0$ ) é igual ao valor do empréstimo (VP) e que o saldo devedor ( $SD_t$ ), após o pagamento da última prestação ( $PGTO_t$ ), é igual a zero, tem-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1+i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = [SD_0 \times (1+i) - PGTO_1] \times (1+i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+i)^2 - PGTO_1 \times (1+i) - PGTO_2$$

$$SD_3 = SD_2 \times (1+i) - PGTO_3$$

$$SD_3 = [SD_0 \times (1+i)^2 - PGTO_1 \times (1+i) - PGTO_2] \times (1+i) - PGTO_3$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+i)^3 - PGTO_1 \times (1+i)^2 - PGTO_2 \times (1+i) - PGTO_3$$

Ao considerar-se genericamente  $SD_t$  como o saldo devedor no final de um período  $t$ , qualquer, sobre esse saldo devedor, ao final do período de ordem  $t$ , obtém-se:

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - PGTO_1 \times (1+i)^{t-1} - PGTO_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - PGTO_t \quad [XXVIII]$$

É importante observar que esta fórmula é idêntica à fórmula genérica do montante de juros compostos [XXV], quando se considera que as movimentações ( $M$ ) são iguais à diferença entre os pagamentos e as liberações. Como não há liberações, as movimentações são iguais aos pagamentos:  $M = PGTO$ .

Considerando que  $SD_t = 0$ , multiplicando os dois lados da equação por  $-(1+i)^{-t}$  e isolando o  $SD_0$ , obtém-se:

$$SD_0 \times (1+i)^t = PGTO_1 \times (1+i)^{t-1} + PGTO_2 \times (1+i)^{t-2} \dots + PGTO_t$$

$$SD_0 = PGTO_1 \times (1+i)^{-1} + PGTO_2 \times (1+i)^{-2} + PGTO_3 \times (1+i)^{-3} \dots + PGTO_t \times (1+i)^{-t}$$

Como o valor dos pagamentos constantes ( $PGTO$ ) é uma característica do sistema Price, e fatorando esses pagamentos, comuns a todos os termos, obtém-se:

$$SD_0 = PGTO [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} \dots + (1+i)^{-t}]$$

Ao se constatar que dentro dos colchetes tem-se a soma dos termos de uma progressão geométrica ( $PG$ ) limitada de  $n$  termos, com o primeiro termo ( $a_1$ ) e a razão ( $q$ ) iguais a  $(1+i)^{-1}$ , obtém-se:

$$SD_0 = PGTO \times (1+i)^{-1} \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Multiplicando-se tanto o numerador como o denominador por  $-(1+i)^1$  e considerando que  $SD_0 = VP$ , obtém-se:

$$VP = PGTO \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Essa expressão é representada, na maioria das vezes, pelo resultado da multiplicação do numerador e denominador por  $(1+i)^n$ :

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Consequentemente, isolando PGTO, tem-se o fator do valor presente de forma invertida:

$$PGTO = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

Destaque-se que essas fórmulas, tanto para o cálculo da prestação constante, como do valor presente, no Sistema Price, originaram-se dos critérios utilizados no próprio desenvolvimento e construção da planilha de amortização, em que se concluiu matematicamente que o valor de qualquer saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior, acrescido do juro do período, menos o valor da prestação.

Genericamente, pode-se concluir que, ao final do período  $t$ , sobre o  $SD_{t-1}$  serão exigidos novos juros:

$$J_{t+1} = SD_t \times i$$

Utilizando a igualdade  $SD_t = SD_{t-1} \times (1+i) - PGTO_t$  obtém-se:

$$J_{t+1} = [SD_{t-1} \times (1+i) - PGTO_t] \times i$$

$$J_{t+1} = SD_{t-1} \times (1+i) \times i - PGTO_t \times i$$

$$J_{t+1} = SD_{t-1} \times i + SD_{t-1} \times i^2 - PGTO_t \times i$$

O pagamento da prestação de ordem t+1 liquidará esses juros e amortizará a diferença:

$$A_{t+1} = PGTO_{t+1} - J_{t+1}$$

Substituindo  $J_{t+1}$ , obtém-se:

$$A_{t+1} = PGTO_{t+1} - [SD_{t-1} \times i + SD_{t-1} \times i^2 - PGTO_t \times i]$$

$$A_{t+1} = PGTO_{t+1} - SD_{t-1} \times i - SD_{t-1} \times i^2 + PGTO_t \times i$$

Considerando que  $PGTO_{t+1} = PGTO_t$  e procedendo-se às devidas fatorações, obtém-se:

$$A_{t+1} = PGTO \times (1+i) - SD_{t-1} \times i \times (1+i)$$

$$A_{t+1} = (PGTO - SD_{t-1} \times i) \times (1+i)$$

Utilizando a igualdade  $A_t = PGTO_t - SD_{t-1} \times i$ , obtém-se:

$$A_{t+1} = A_t \times (1+i)$$

Desse modo, constata-se que a parte da prestação constante do Sistema Price, destinada à amortização do valor do empréstimo, em um período t, qualquer, será igual à parcela de amortização do período anterior multiplicada por  $(1+i)$ . Portanto, essas parcelas de amortização formam uma progressão geométrica de razão igual a  $(1+i)$ , com a seguinte configuração:

$$A_1 = A_1 \times (1+i)^0$$

$$A_2 = A_1 \times (1+i)^1; A_2 = A_1 \times (1+i)^0 \times (1+i)^1; A_2 = A_1 \times (1+i)^1$$

$$A_3 = A_2 \times (1+i)^1; A_3 = A_1 \times (1+i)^0 \times (1+i)^1 \times (1+i)^1; A_3 = A_1 \times (1+i)^2$$

$$A_4 = A_3 \times (1+i)^1; A_4 = A_1 \times (1+i)^0 \times (1+i)^1 \times (1+i)^1 \times (1+i)^1; A_4 = A_1 \times (1+i)^3; \dots$$

$$A_t = A_1 \times (1+i)^{t-1}$$

Como a soma de todas as amortizações é igual ao valor do empréstimo, e substituindo  $A_t$  pela equação anterior, tem-se:

$$VP = A_1 \times (1+i)^0 + A_1 \times (1+i)^1 + A_1 \times (1+i)^2 \dots + A_1 \times (1+i)^{t-1}$$

Fatorando  $A_1$ , comum a todos os termos, obtém-se:

$$VP = A_1 \times [(1+i)^0 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{t-1}]$$

Constata-se que dentro dos colchetes tem-se a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) limitada de n termos, com o primeiro termo ( $a_1$ ) e a razão (q) igual a  $(1+i)^1$ .

Aplicando os referidos dados, obtém-se:

$$VP = A_1 \times (1+i)^0 \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Fazendo uso da igualdade  $A_1 = PGTO_1 - VP \times i$ , e considerando que os pagamentos são constantes, tem-se:

$$VP = (PGTO - VP \times i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Aplicando a propriedade distributiva e colocando os termos comuns (VP) do mesmo lado da equação, obtém-se:

$$VP + VP \times i \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Fatorando VP, comum aos termos, e procedendo-se às simplificações, tem-se:

$$VP \times (1+i)^n = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Isolando PGTO, obtém-se:

$$PGTO = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

Consequentemente, isolando VP, tem-se o fator de forma invertida:

$$VP = PGTO \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Destaque-se que essas fórmulas, tanto para o cálculo da prestação constante como para o valor presente no Sistema Price, originaram-se dos critérios utilizados no próprio desenvolvimento e construção da planilha de amortização, em que se concluiu matematicamente

que o valor de qualquer amortização é o valor da amortização anterior multiplicado por  $(1 + i)$ , formando, por conseguinte, uma progressão geométrica de razão igual a  $(1 + i)$ .

Ressalte-se, ainda, que essas fórmulas, tanto para o cálculo da prestação constante como para o valor presente no Sistema Price, são idênticas às fórmulas obtidas também por meio dos critérios utilizados no desenvolvimento e construção da planilha de amortização, em que se concluiu matematicamente que o valor de qualquer saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior, acrescido do juro do período, menos o valor da prestação.

Enfatize-se, também, que essas fórmulas, tanto para o cálculo do valor presente no Sistema Price como da prestação constante, são idênticas às fórmulas obtidas para o cálculo da prestação constante e do valor presente do modelo-padrão ou modelo-básico ou série uniforme de valores monetários postecipados [VIII] e [IX], coincidentes com os resultados obtidos pelos coeficientes das Tabelas de Juro Composto - Price.

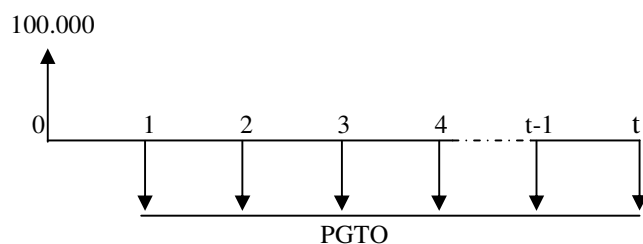
### 5.1.1 Evidências da capitalização composta

#### (a) Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes

Só há dois regimes de capitalização dos juros: simples e composto. Se não é simples, obrigatoriamente, será composto e vice-versa.

Para melhor compreender e cotejar com a capitalização simples, admita-se como exemplo um empréstimo de \$ 100.000,00 (VP), a ser liquidado em cinco (t) prestações mensais e iguais, sem entrada, a uma taxa efetiva de juros de 10% ao mês (i) e determine-se a prestação periódica (PGTO), considerando: (1) **Tabela Price**; (2) **Equivalência em Juro composto** e (3) **Equivalência em Juro Simples**.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



**(1) Tabela Price**

Considerando que o coeficiente para obtenção do valor da prestação é o inverso do coeficiente para obtenção do valor presente, para determinar o valor de cada prestação mensal utiliza-se o inverso do coeficiente da Tabela II, contida no livro de Price (1803, p. 269). Para  $n = 5$  e taxa 10% tem-se 3,7907867, sendo o seu inverso igual a 0,2637975; logo o valor da parcela será o resultado da multiplicação do inverso do coeficiente pelo valor do empréstimo:

$$PGTO = 100.000 \times 0,2637975$$

$$PGTO = \mathbf{26.379,75}$$

Da mesma forma, utilizando a fórmula para obtenção da prestação constante do Sistema Price, obtida por meio dos critérios utilizados no próprio desenvolvimento e construção da planilha de amortização, idêntica à fórmula para obtenção da prestação constante do modelo-padrão [IX], tem-se:

$$PGTO = 100.000,00 \times \frac{(1+0,10)^5 \times 0,10}{(1+0,10)^5 - 1}$$

$$PGTO = \mathbf{26.379,75}$$

**(2) Equivalência em Juros compostos**

Como já demonstrado na capitalização composta (4.2.2), a equivalência poderá ser efetivada em qualquer data focal. Sendo assim, será adotada a data zero, para poder comparar com a capitalização simples, bem como coincidir com os padrões das calculadoras financeiras e da literatura, tendo como consequência a seguinte equação de valor:

$$VP = \frac{PGTO}{(1+i)^1} + \frac{PGTO}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PGTO}{(1+i)^t}$$

Fatorando PGTO, comum aos termos, tem-se:

$$VP = PGTO \times \left[ \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t} \right]$$



Considerando que entre os colchetes verifica-se o somatório dos fatores de descapitalização a juros compostos de 1 a t, tem-se:

$$VP = PGTO \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} \quad \text{[XXIX]}$$

Isolando o valor da prestação constante, obtém-se:

$$PGTO = VP \div \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} \quad \text{[XXX]}$$

Aplicando a expressão matemática obtida para o cálculo da prestação, considerando juro composto como regime de capitalização [XXX], determina-se o valor da prestação:

$$PGTO = 100.000,00 \div \left[ \frac{1}{(1+0,10)^1} + \frac{1}{(1+0,10)^2} + \dots + \frac{1}{(1+0,10)^5} \right]$$

$$PGTO = \frac{100.000,00}{3,7907868}$$

$$\mathbf{PGTO = 26.379,75}$$

Conforme comprovado cientificamente em [4.2.2], o regime de juros compostos, diferentemente do regime de juros simples, permite pagamento de partes do capital, por admitir o fracionamento de prazo. Independentemente disso, com o intuito de comparar com a capitalização simples e aplicando o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos distintos, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 26.379,75 cada, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente), consideração do valor do dinheiro no tempo. A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, como se constata:

$$VP_1 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^1} \rightarrow 23.981,59$$

$$VP_2 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^2} \rightarrow 21.801,44$$

$$VP_3 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^3} \rightarrow 19.819,50$$

$$VP_4 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^4} \rightarrow 18.017,72$$

$$VP_5 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^5} \rightarrow 16.379,75$$

Como restou comprovado, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 23.981,59; \$ 21.801,44; \$ 19.819,50; \$ 18.017,72 e \$ 16.379,75, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00, para liquidação em cinco prestações postecipadas mensais e iguais; porquanto, nas duas formas, a liquidação será em cinco pagamentos postecipados mensais e iguais a \$ 26.379,75, no regime de juros compostos, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

### (3) Equivalência em Juros simples

Para melhor compreender e cotejar com a capitalização composta, admita-se o mesmo exemplo e determine-se a prestação periódica (PGTO), considerando o **juro simples como regime de capitalização**.

Como já demonstrado na capitalização simples (4.2.1), a equivalência deverá ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como focal, tendo como consequência a seguinte equação de valor:

$$VP = \frac{PGTO}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO}{(1+i \times 2)} + \dots + \frac{PGTO}{(1+i \times t)}$$

Fatorando PGTO que é comum aos termos, tem-se:

$$VP = PGTO \times \left[ \frac{1}{(1+i \times 1)} + \frac{1}{(1+i \times 2)} + \dots + \frac{1}{(1+i \times t)} \right]$$

Considerando que entre os colchetes verifica-se o somatório dos fatores de descapitalização a juros simples de 1 a t, obtém-se:

$$VP = PGTO \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i t)} \quad \text{[XXXI]}$$

Isolando o valor da prestação constante, obtém-se:

$$PGTO = VP \div \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i t)} \quad \text{[XXXII]}$$

Aplicando a expressão matemática obtida para o cálculo da prestação<sup>4</sup>, considerando juro simples como regime de capitalização [XXXI], determina-se o valor da prestação:

$$PGTO = 100.000,00 \div \left[ \frac{1}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{1}{(1+0,10 \times 2)} + \dots + \frac{1}{(1+0,10 \times 5)} \right]$$

$$PGTO = \frac{100.000,00}{3,8926074}$$

$$\mathbf{PGTO = 25.689,72}$$

Considerando a questão conceitual, comprovada cientificamente em [4.2.1], o regime de juros simples, diferentemente do regime de juros compostos, não permite pagamento de partes do capital de \$ 100.000,00, por não admitir o fracionamento de prazo. Logo, não há como fazer um único empréstimo para liquidar em parcelas, constantes ou não. Entretanto, aplicando-se o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos distintos, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 25.689,72 cada, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, e a soma de seus valores atuais, na data zero, seria igual ao valor do empréstimo, como se confirma:

$$VP_1 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 1)} \rightarrow 23.354,29$$

---

<sup>4</sup> A prestação pode ser obtida também pela fórmula apresentada por FARO, expressa no item 2.3.6.

$$VP_2 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 2)} \rightarrow 21.408,10$$

$$VP_3 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 3)} \rightarrow 19.761,33$$

$$VP_4 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 4)} \rightarrow 18.349,80$$

$$VP_5 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)} \rightarrow 17.126,48$$

Como restou comprovado cientificamente, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 23.354,29; \$ 21.408,10; \$ 19.761,33; \$ 18.349,80 e \$ 17.126,48, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00, para liquidação em 5 prestações postecipadas mensais e iguais; porquanto, nas duas formas, a liquidação será em cinco pagamentos mensais e iguais a \$ 25.689,72, no regime de juros simples, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

### **Confirmação 1 - Algebricamente**

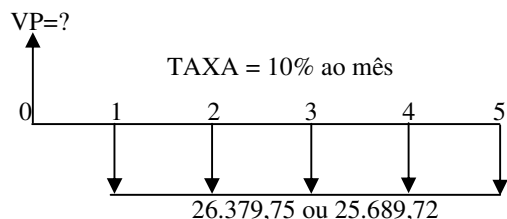
Conforme comprovado matematicamente, ao se deduzir as fórmulas por meio da equivalência de fluxos de caixa e determinar o valor das prestações constantes, a juro simples e a juro composto, seguindo a mesma analogia, e comparar com a prestação constante obtida por meio do Sistema Price, concluí-se:

SIMPLES	COMPOSTO	Price
$\frac{VP}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i \times t)}}$	$\neq \frac{VP}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t}}$	$= \frac{VP \times (1+i)^t \times i}{(1+i)^t - 1}$

### **Confirmação 2 – Valor Presente Líquido**

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, é adotada a data zero como data focal e a mesma analogia para se determinar o valor presente das prestações (VP) e o valor presente líquido (VPL), no fluxo de caixa comum.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



### Capitalização composta

$$VP = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^1} + \frac{26.379,75}{(1+0,10)^2} + \frac{26.379,75}{(1+0,10)^3} + \frac{26.379,75}{(1+i)^4} + \frac{26.379,75}{(1+i)^5}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

$$VP = \frac{26.379,75}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{26.379,75}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{26.379,75}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{26.379,75}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{26.379,75}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 102.686,01$$

$$VPL = 100.000,00 - 102.686,01 = -2.686,01$$

### Capitalização simples

$$VP = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

$$VP = \frac{25.689,72}{(1+0,10)^1} + \frac{25.689,72}{(1+0,10)^2} + \frac{25.689,72}{(1+0,10)^3} + \frac{25.689,72}{(1+i)^4} + \frac{25.689,72}{(1+i)^5}$$

$$VP = 97.387,25$$

$$VPL = 100.000,00 - 97.387,25 = 2.612,75$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de \$ 26.379,75, à taxa de 10% ao mês, são equivalentes a \$ 100.000,00 somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos; porquanto, a juros simples, seriam equivalentes \$ 102.686,01. Da mesma forma, as cinco prestações mensais de \$ 25.689,72, à taxa de 10% ao mês, são equivalentes a \$

100.000,00 somente se forem descapitalizadas a juros simples; porquanto, a juros compostos, seriam equivalentes a \$ 97.384,25.

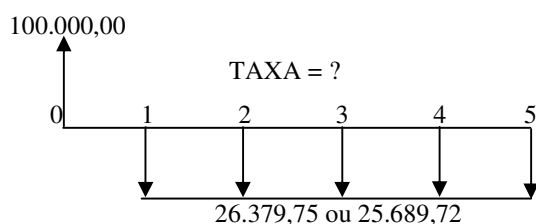
Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros compostos, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se o valor presente líquido for negativo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros simples, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se o valor presente líquido for positivo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

### **Confirmação 3 – Taxa de juros**

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, é adotada a data zero como data focal e a mesma analogia para se determinar a taxa de juros, no fluxo de caixa comum, com a seguinte configuração:

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



#### **Capitalização composta**

$$100.000,00 = \frac{26.379,75}{(1+i)^1} + \frac{26.379,75}{(1+i)^2} + \frac{26.379,75}{(1+i)^3} + \frac{26.379,75}{(1+i)^4} + \frac{26.379,75}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira HP 12C, que somente calcula a taxa na capitalização composta, tem-se:

f REG  
 100000 CHS g CF<sub>0</sub>  
 26379,75 g CF<sub>j</sub>  
 5 g N<sub>j</sub>  
 f IRR      →      10% ao mês

### Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{26.379,75}{(1+i \times 1)} + \frac{26.379,75}{(1+i \times 2)} + \frac{26.379,75}{(1+i \times 3)} + \frac{26.379,75}{(1+i \times 4)} + \frac{26.379,75}{(1+i \times 5)}$$

Como não há calculadoras ou *softwares* financeiros específicos para determinar a taxa de fluxo de caixa em juros simples, pode-se utilizar o Método Iterativo de Newton, difundido como interpolação linear<sup>5</sup>.

Percebe-se na equação que se está buscando a taxa “i%”, tal que o valor presente seja igual a \$ 100.000,00. Ao estimar 11%, por exemplo, obtém-se um valor presente igual a \$ 100.561,14. Essa taxa está abaixo da taxa verdadeira; pois, quanto maior a taxa menor o valor presente, devendo-se testar taxa superior. Ao estimar 11,3% obtém-se \$ 99.943,43, concluindo-se, então, que a taxa verdadeira, aquela que zera o fluxo, encontra-se entre essas duas taxas utilizadas como experimento. Destaque-se que o grau de certeza da resposta, por se tratar de um processo linear, está diretamente ligado ao intervalo dos experimentos: quanto menor intervalo, maior o grau de certeza no resultado.

Procedendo-se ao processo de interpolação linear, tem-se:

┌	→	11,0%	100.561,14	←	┐
└		11,3%	99.943,43		┘
└		i%	100.000,00		┘

$$\frac{(i\% - 11,0\%)}{(11,3\% - 11,0\%)} = \frac{(100.000,00 - 100.561,14)}{(99.943,43 - 100.561,14)}$$

i = 11,27% ao mês

---

<sup>5</sup> A taxa pode ser determinada também por meio do Microsoft Excel, na função Ferramentas – Atingir meta.

Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{25.689,72}{(1+i \times 1)} + \frac{25.689,72}{(1+i \times 2)} + \frac{25.689,72}{(1+i \times 3)} + \frac{25.689,72}{(1+i \times 4)} + \frac{25.689,72}{(1+i \times 5)}$$

Determina-se a taxa por interpolação linear, mesmo processo utilizado no exemplo anterior. Ao estimar 9,98% e 10,3%, por exemplo, obtém como valor presente \$ 100.042,42 e \$ 99.368,58, respectivamente, concluindo-se, então, que a taxa verdadeira encontra-se entre essas duas taxas. Procedendo-se ao processo de interpolação linear, tem-se:

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">9,98%</td> <td style="text-align: right;">100.042,42</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">10,3%</td> <td style="text-align: right;">99.368,58</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">i%</td> <td style="text-align: right;">100.000,00</td> </tr> </table>	9,98%	100.042,42	10,3%	99.368,58	i%	100.000,00
9,98%	100.042,42					
10,3%	99.368,58					
i%	100.000,00					

$$\frac{(i\% - 9,98\%)}{(10,3\% - 9,98\%)} = \frac{(100.000,00 - 100.042,42)}{(99.368,58 - 100.042,42)}$$

i = 10% ao mês

$$100.000,00 = \frac{25.689,72}{(1+i)^1} + \frac{25.689,72}{(1+i)^2} + \frac{25.689,72}{(1+i)^3} + \frac{25.689,72}{(1+i)^4} + \frac{25.689,72}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do fluxo, com o auxílio de calculadora financeira HP 12C, que somente calcula a taxa na capitalização composta, obtém-se:

f REG

100000 g CF<sub>0</sub>

25.689,72,75 CHS g CF<sub>j</sub>

5 g N<sub>j</sub>

f IRR      →      8,97%

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de \$ 26.379,75 são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00, somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos de 10% ao mês; porquanto, caso fossem a juros simples, a taxa seria de 11,27%. Da mesma forma, as cinco prestações mensais de 25.689,72 são equivalentes ao



valor do empréstimo de \$ 100.000,00, somente se forem descapitalizadas a juros simples de 10% mês; porquanto, caso fossem a juros compostos, a taxa seria de 8,97%.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa originados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros compostos, e o seu resultado for igual à taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se a taxa de juros for menor que a taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa originados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros simples, e o seu resultado for igual à taxa do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se a taxa de juros for menor que a taxa do empréstimo, esse empréstimo não foi efetivado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

#### **(b) Há juros embutidos nos saldos devedores**

Considerando que o sistema Price, para determinar o juro do período, tem como característica a incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior, em se comprovando que esse saldo contém juro, a capitalização composta está caracterizada.

#### **Confirmação 1**

Como observado, não há na referida obra de Richard Price qualquer menção em desmembrar, no valor do pagamento, a parcela relativa aos juros e à amortização. Sendo assim, para compreender a estrutura e o desenvolvimento desse sistema, adote-se como exemplo um empréstimo no valor de \$ 100.000,00, a ser liquidado em 5 prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa contratada de 120% ao ano, capitalização mensal (efetiva de 10% ao mês, para fins didáticos e evidenciar as diferenças entre os regimes), para elaborar a planilha de amortização no Quadro 14, determinando o valor da prestação, o saldo devedor antes e depois do pagamento de cada prestação.

O valor da prestação constante e periódica, obtido por meio do coeficiente da Tabela II, contida no livro de Price (1803, p. 269) é igual a \$ 26.379,75.

Mês	SD antes PGTO	PGTO	SD após PGTO
0			100.000,00
1	110.000,00	26.379,75	83.620,25
2	91.982,28	26.379,75	65.602,53
3	72.162,78	26.379,75	45.783,03
4	50.361,34	26.379,75	23.981,59
5	26.379,75	26.379,75	zero

Quadro 14: Tabela Price – Pagamentos e saldos devedores  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 14, a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos; porquanto, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, um valor não contém juro somente quando se encontra na data zero. Se a taxa incidir sobre saldos remanescentes, como é o caso dos saldos devedores nas datas um, dois, três e quatro, a capitalização é composta; pois, **esses saldos remanescentes**, embora de valores nominais decrescentes, **encontram-se em datas posteriores à data zero e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, contêm juros**. Em razão da evidência conceitual, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, há autores que consideram que o pagamento, por ter valor superior ao do juro do período calculado sobre o saldo devedor anterior, liquida esse juro e com a sobra ainda amortiza o saldo devedor, não restando, dessa forma, juros devidos no saldo devedor. Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido, exemplo típico de capitalização simples.

Não obstante, é oportuno enfatizar que **o valor do juro é totalmente pago somente quando há liquidação integral do empréstimo** (capital inicial emprestado + juros devidos totais = saldo devedor), no final de um único período de capitalização, caracterizando uma única operação. Caso contrário, sempre haverá juro devido (vencido) e não pago embutido no saldo devedor, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático, observe-se o desenvolvimento da planilha de amortização do Sistema Price, constante do Quadro 14. Ao final do 1º período são exigidos juros à taxa  $i$ ,

acrescidos ao valor do empréstimo  $VE = SD_0$  (saldo devedor na data zero), para obtenção do saldo devedor antes do pagamento da prestação periódica e, deduzindo-se o valor do pagamento, obtém-se o valor do saldo devedor após o pagamento dessa prestação ( $SD_1$ ), como comprovado em [XXVII], confirmando que o saldo devedor independe do valor da amortização e dos juros.

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1 + i) - PGTO$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$SD_2 = [SD_0 \times (1 + i) - PGTO] \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times [(1 + i) + 1]$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times (2 + i) \quad \Rightarrow \quad \text{caracterização de juro composto}$$

Utilizando-se os dados do exemplo prático, tem-se:

$$SD_2 = 100.000,00 \times (1,10)^2 - 26.379,75 \times (2 + 0,10)$$

$$SD_2 = \mathbf{65.602,53}$$

$$SD_3 = SD_2 \times (1 + i) - PGTO$$

Substituindo  $SD_2$ , tem-se:

$$SD_3 = [SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times (2 + i)] \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1 + i)^3 - PGTO \times (3 + i + 2i + i^2)$$

$$SD_3 = 100.000,00 \times (1 + i)^3 - 26.379,75 \times (3 + 0,10 + 2 \times 0,10 + 0,10^2)$$

$$SD_3 = \mathbf{45.783,03.....}$$

Como se depreende, pelo surgimento dos fatores de capitalização composta  $1,10^2$  e  $1,10^3$  na determinação do  $SD_2$  e  $SD_3$ , bem como em todos os outros saldos devedores posteriores, fica comprovada a existência de juros devidos e não pagos nesses saldos devedores, e a capitalização composta está caracterizada, pela incidência da taxa de juros sobre juros. Enfatize-se que os juros devidos e não pagos, por se encontrarem em datas anteriores à data do saldo devedor, são juros vencidos. Portanto, como a taxa de juros incide sempre sobre juros anteriores à data base de cálculo, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos é característica da capitalização composta.

### Confirmação 2

Depois de determinado o valor das parcelas constantes nos sistemas (1) Price, (2) Equivalência em Juros Compostos e (3) Equivalência em Juros Simples, as planilhas de amortização do empréstimo tomado como exemplo podem ser elaboradas, decompondo as prestações em parcelas de juros e amortização, conforme características de cada sistema.

(1) No Sistema Price o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior e, como a prestação contém juros e amortização, a diferença entre a prestação e o juro do período é a amortização do período, conforme Quadro 15:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	zero
<b>Σ</b>	131.898,74	31.898,74	100.000,00	318.987,40

Quadro 15: Tabela Price – Planilha tradicional

Fonte: Elaborado pelo autor

Destaque-se que a soma dos pagamentos, dos juros e da amortização não tem qualquer sentido financeiro, por não considerar o valor do dinheiro no tempo, e representam, apenas, a soma de valores contábeis históricos.

Para a comprovação da existência de juros devidos (vencidos) e não pagos nos saldos devedores, bases da incidência da taxa efetiva periódica de juros, caracterizando a capitalização composta, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVIII] para determinação do saldo devedor de todos os períodos posteriores ao primeiro:

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - PGTO_1 \times (1+i)^{t-1} - PGTO_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - PGTO_t$$

$$SD_2 = 100.000 \times (1,10)^2 - 26.379,75 \times (1,10)^1 - 26.379,75$$

$$SD_2 = 65.602,53$$

$$SD_3 = 100.000 \times (1,10)^3 - 26.379,75 \times (1,10)^2 - 26.379,75 \times (1,10)^1 - 26.379,75$$

$$SD_3 = 45.783,03$$

$$SD_4 = 100.000 \times (1,10)^4 - 26.379,75 \times (1,10)^3 - \dots - 26.379,75 \times (1,10)^1 - 26.379,75$$

$$SD_4 = 23.981,59$$

$$SD_5 = 100.000 \times (1,10)^5 - 26.379,75 \times (1,10)^4 - \dots - 26.379,75 \times (1,10)^1 - 26.379,75$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, pelo surgimento dos fatores de capitalização composta  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ , e  $(1,10)^4$  na determinação dos saldos devedores, fica comprovada a existência de juros devidos e não pagos nesses saldos devedores e, pela incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos, a capitalização composta está caracterizada no sistema Price.

Destaque-se, ainda, que existem defesas de que a capitalização na Tabela Price é simples, argumentando-se que o cálculo do juro simples sobre o valor médio do capital efetivamente utilizado pelo tomador do empréstimo é igual ao total de juros simples pagos:

$$\text{Média dos saldos devedores} = \frac{\sum \text{saldos devedores}}{\text{Prazo total}}$$

$$\text{Média dos saldos devedores} = \frac{318.987,40}{5} = 63.797,40$$

Utilizando a fórmula para obtenção dos juros simples [II], tem-se:

$$J = 63.997,48 \times 0,10 \times 5 = 31.898,74$$

A média aritmética de uma amostra, ou simplesmente média, é um número que pode representar o total de elementos da amostra, sem alterar a soma desses elementos. Como a soma de  $n$  elementos deve ser igual a  $n$  vezes essa média, para se determinar a média aritmética da amostra somam-se todos os valores e divide-se pelo total de elementos, como aplicado no exemplo.

Entretanto, para que não restem dúvidas, adote-se um exemplo prático: colheita de laranjas. Em um dia de trabalho foram colhidas cinco caixas de laranjas, com 36, 37, 41, 42 e 44 unidades em cada caixa. Por questões climáticas, houve perda da safra e em razão da exigência da qualidade do produto, estima-se que 10% de cada caixa devem ser descartados. O conceito de média é utilizado para suprimir a contagem da população de onde saiu a amostra; pois, o trabalho a ser despendido se tornaria enfadonho à medida em que o número de caixas fosse considerável.

ITEM	LARANJAS	
	Produção	Descarte
1	36	3,6
2	37	3,7
3	41	4,1
4	42	4,2
5	44	4,4
$\Sigma$	200	20
<b>MÉDIA</b>	40	4,0

Quadro 16: Produção versus descartes

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim sendo, ao aplicar o conceito de média, pode-se afirmar que haverá 40 laranjas em cada uma das caixas, totalizando 200 laranjas, mesma quantidade se a soma for efetivada por caixa, conforme Quadro 16. O total de laranjas a serem descartadas pode ser obtido por meio da seguinte fórmula:

Total de laranjas a serem descartadas = média x taxa x número de caixas

Total de laranjas a serem descartadas = 40 x 0,10 x 5

Total de laranjas a serem descartadas = 20

Logo, percebe-se que o total de laranjas a ser descartado, obtido por meio da média, é idêntico ao total obtido por meio do Quadro 16, ou seja, 10% do total de laranjas. Portanto, embora utilize a mesma fórmula e raciocínio, **não apresenta qualquer elo com o regime de capitalização dos juros, mas sim aplicação de conceitos de estatística**, causando uma interpretação errônea que induz o analista a concluir que a capitalização do Sistema Price é simples, quando, na verdade e cientificamente comprovada, é composta.

(2) No Sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, o juro do período é o resultado da aplicação da fórmula de juros compostos [VII] sobre o valor presente de cada empréstimo ou pela diferença entre o montante de cada empréstimo (valor da prestação) e o valor presente de cada empréstimo (amortização). A amortização é obtida pela descapitalização da prestação (montante) para a data zero ou pela diferença entre a prestação e o referido juro.

$$J_1 = 23.981,59 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.398,16$$

$$A_1 = 26.379,75 - 2.398,16 \rightarrow A_1 = 23.981,59$$

$$J_2 = 21.801,44 \times [(1+0,10)^2 - 1] \rightarrow J_2 = 4.578,30$$

$$A_2 = 26.379,75 - 4.578,30 \rightarrow A_2 = 21.801,44$$

$$J_3 = 19.819,50 \times [(1+0,10)^3 - 1] \rightarrow J_3 = 6.560,25$$

$$A_3 = 26.379,75 - 6.560,25 \rightarrow A_3 = 19.819,50$$

$$J_4 = 18.017,72 \times [(1+0,10)^4 - 1] \rightarrow J_4 = 8.362,02$$

$$A_4 = 26.379,75 - 8.362,02 \rightarrow A_4 = 18.017,72$$

$$J_5 = 16.379,75 \times [(1+0,10)^5 - 1] \rightarrow J_5 = 10.000,00$$

$$A_5 = 26.379,75 - 10.000,00 \rightarrow A_5 = 16.379,75$$

Considerando cinco empréstimos individuais, a amortização é o valor presente de cada empréstimo e o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma composta até o período igual ao da prestação liquidada, da seguinte forma:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i)^1$$

$$SD_1 = (100.000 - 23.981,59) \times (1 + 0,10)^1$$

$$SD_1 = 83.620,25$$

$$SD_2 = (VE - A_2 - A_1) \times (1 + i)^2$$

$$SD_2 = (100.000 - 23.981,59 - 21.801,44) \times (1 + 0,10)^2$$

$$SD_2 = 65.602,53$$

$$SD_3 = (VE - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^3$$

$$SD_3 = (100.000 - 23.981,59 - 21.801,44 - 19.819,50) \times (1 + 0,10)^3$$

$$SD_3 = 45.783,03$$

$$SD_4 = (VE - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^4$$

$$SD_4 = (100.000 - 23.981,59 - 21.801,44 - 19.819,50 - 18.017,72) \times (1 + 0,10)^4$$

$$SD_4 = 23.981,59$$

$$SD_5 = (VE - A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^5$$

$$SD_5 = (100.000 - 23.981,59 - 21.801,44 - \dots - 18.017,72 - 16.379,75) \times (1 + 0,10)^5$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, todos os saldos devedores, iguais aos do sistema de amortização Price, contêm juros e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ ,  $(1,10)^4$  e  $(1,10)^5$ . Logo, a capitalização composta no Sistema de Amortização Price está confirmada.

Genericamente, conforme desenvolvimento, pode-se concluir que, ao final de um período  $t$ , qualquer, tem-se a seguinte formulação matemática:

$$SD_t = [VE - (A_t + A_{t-1} + A_{t-2} + A_{t-3} + \dots + A_1)] \times (1 + i)^t \quad \text{[XXXIII]}$$

Depois de calculados os elementos componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 17:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	26.379,75	2.398,16	23.981,59	83.620,25
2	26.379,75	4.578,30	21.801,44	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	45.783,03
4	26.379,75	8.362,03	18.017,72	23.981,59
5	26.379,75	10.000,00	16.379,75	zero
<b>Σ</b>	131.898,74	31.898,74	100.000,00	318.987,40

Quadro 17: Prestações do Price – Empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se depreende, no sistema de amortização com base em juros compostos - Quadro 17, as prestações e os saldos devedores são exatamente os mesmos da planilha do Sistema Price - Quadro 15; portanto, como comprovado cientificamente, a capitalização composta no Sistema Price está confirmada. Entretanto, é oportuno observar que **os juros e, conseqüentemente, as amortizações, ocorrem de forma invertida ao Sistema Price**. Esse fato, porém, não altera os saldos devedores e nem o fluxo de caixa do empréstimo, considerando-se que o cálculo do saldo devedor independe do valor dos juros e da amortização, conforme comprovação [XXVII].



No sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, os juros e as amortizações são obtidos considerando o valor do dinheiro no tempo; porém, no sistema Price e demais sistemas usuais, exceto o sistema com base em juros simples, **convencionou-se que os juros sejam determinados por meio da incidência da taxa efetiva sobre o saldo devedor do período anterior**, fazendo com que sejam decrescentes e as amortizações crescentes, à medida que decresce o saldo devedor, com a liquidação das prestações.

Esse procedimento facilita sobremaneira a compreensão e os cálculos, além de aumentar o valor do benefício fiscal para o devedor, embora represente uma distorção financeira em termos conceituais; pois, quanto maior o prazo, maior deveria ser o juro embutido na prestação, como ocorre com o sistema de amortização com base em juros compostos, que considera o valor do dinheiro no tempo.

A referida distorção financeira justifica o fato de que, havendo liquidação antecipada de alguma parcela, considera-se liquidada a última, em razão de que os juros embutidos são os menores, ou seja, relativos à primeira prestação quando se considera o valor do dinheiro no tempo. Para melhor entendimento, adote-se a hipótese de que na data zero se queira antecipar o pagamento da primeira prestação: no sistema Price, conforme planilha de amortização, deveria ser liquidada pelo valor de \$ 16.379,75, resultado do desconto dos juros de \$ 10.000,00 do valor da prestação de \$ 26.379,75.

Certamente, nenhuma instituição financeira aceitará a liquidação da primeira prestação pelo valor de \$ 16.379,75, uma vez que os juros embutidos e, por conseguinte o valor da amortização, não são coerentes e nem traduzem consistência científica. Como o financiamento será liquidado em prestações, os juros de \$ 10.000,00, calculados sobre o total da dívida, corresponderiam aos juros somente se o empréstimo fosse liquidado no final de um mês e não aos juros relativos à primeira prestação. A primeira prestação deveria ser liquidada por \$ 23.981,59, correspondentes ao valor do primeiro empréstimo e resultado da extração dos juros de \$ 2.398,16 do valor da prestação de \$ 26.379,75, juros contidos na última prestação do sistema Price e na primeira do sistema a juros compostos.

Ao se liquidar antecipadamente prestações em juros compostos, os valores a serem pagos devem levar em consideração os juros embutidos em cada prestação (empréstimo), ou seja, o valor do dinheiro no tempo. Se, porventura, for antecipado em um mês o pagamento de uma prestação, deve-se determinar o valor presente da prestação um mês antes; se for antecipado em

dois meses, deve-se determinar o valor presente da prestação dois meses antes, e assim por diante, como se demonstra:

Antecipando o pagamento de prestação em um mês:

$$VP_1 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^1} \Rightarrow 23.981,59$$

$$J_1 = \text{desconto racional} = 2.398,16$$

Antecipando o pagamento de prestação em dois meses:

$$VP_2 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^2} \Rightarrow 21.801,44$$

$$J_2 = \text{desconto racional} = 4.578,30$$

Antecipando o pagamento de prestação em três meses:

$$VP_3 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^3} \Rightarrow 19.819,50$$

$$J_3 = \text{desconto racional} = 6.560,25$$

Destaque-se que, ao se considerar o valor do dinheiro no tempo, os saldos devedores e as amortizações, quando houver pagamento das próximas prestações, ficam exatamente os mesmos, sendo o empréstimo integralmente liquidado quando do pagamento da última prestação.

Definitivamente, o argumento de que a capitalização dos juros na Tabela Price é simples, em razão de que o cálculo do montante sobre o valor médio do capital efetivamente utilizado pelo tomador do empréstimo é igual ao total de juros pagos, não se sustenta; pois, além da questão estatística já explanada, no sistema de amortização com base em juros compostos essa igualdade também ocorre e a capitalização dos juros, certamente, não deixa de ser composta, não somente pela nomenclatura, mas pelas comprovações científicas produzidas.

(3) No Sistema de amortização com base na equivalência em juros simples, o juro do período é o resultado da aplicação da fórmula de juros simples [II] sobre o valor presente de cada empréstimo ou pela diferença entre o montante de cada empréstimo (valor da prestação) e o valor presente de cada empréstimo (amortização). A amortização é obtida pela descapitalização da

prestação (montante), a juros simples, para a data zero, ou pela diferença entre a prestação e o referido juro.

$$J_1 = 23.354,29 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.335,43$$

$$A_1 = 25.689,72 - 2.335,43 \rightarrow A_1 = 23.354,29$$

$$J_2 = 21.408,10 \times 0,10 \times 2 \rightarrow J_2 = 4.281,62$$

$$A_2 = 25.689,72 - 4.281,62 \rightarrow A_2 = 21.408,10$$

$$J_3 = 19.761,32 \times 0,10 \times 3 \rightarrow J_3 = 5.928,40$$

$$A_3 = 25.689,72 - 5.928,40 \rightarrow A_3 = 19.761,32$$

$$J_4 = 18.349,80 \times 0,10 \times 4 \rightarrow J_4 = 7.339,92$$

$$A_4 = 25.689,72 - 7.339,92 \rightarrow A_4 = 18.349,80$$

$$J_5 = 17.126,48 \times 0,10 \times 5 \rightarrow J_5 = 8.563,24$$

$$A_5 = 25.689,72 - 8.563,24 \rightarrow A_5 = 17.126,48$$

Genericamente, conforme desenvolvimento, pode-se concluir que, ao final de um período  $t$ , qualquer, tem-se a seguinte formulação matemática:

$$J_t = VP_t \times i \times t \quad \text{[XXIX]}$$

Considerando cinco empréstimos individuais, a amortização é o valor presente de cada empréstimo e o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma simples até o período igual ao da prestação liquidada, da seguinte forma:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i \times 1)$$

$$SD_1 = (100.000 - 23.354,29) \times (1 + 0,10 \times 1)$$

$$SD_1 = 84.310,28$$

$$SD_2 = (VE - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 2)$$

$$SD_2 = (100.000 - 23.354,29 - 21.408,10) \times (1 + 0,10 \times 2)$$

$$SD_2 = 66.285,13$$

$$SD_3 = (VE - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 3)$$

$$SD_3 = (100.000 - 23.354,29 - 21.408,10 - 19.761,32) \times (1 + 0,10 \times 3)$$

$$SD_3 = 46.119,17$$

$$SD_4 = (VE - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 4)$$

$$SD_4 = (100.000 - 23.354,29 - 21.408,10 - \dots - 18.349,80) \times (1 + 0,10 \times 4)$$

$$SD_4 = 23.977,07$$

$$SD_5 = (VE - A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 5)$$

$$SD_5 = (100.000 - 23.354,29 - 21.408,10 - \dots - 18.349,80 - 17.126,48) \times (1 + 0,10 \times 5)$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, os juros de cada empréstimo foram calculados sobre o capital inicial emprestado e não somados a esse capital para exigir novos juros nos períodos seguintes. **Os saldos devedores, embora contenham juros, não se configuram como base de cálculo dos juros simples do período;** pois, a incidência da taxa se dá sobre os valores de cada empréstimo (data zero) e, pelo aparecimento dos fatores: (1,10), (1,20), (1,30), (1,40) e (1,50), a capitalização simples está caracterizada, comprovando que o Sistema Price não se efetiva nesse regime de capitalização.

Genericamente, conforme desenvolvimento, pode-se concluir que, ao final de um período t, qualquer, tem-se a seguinte formulação matemática:

$$SD_t = [VE - (A_t + A_{t-1} + A_{t-2} + A_{t-3} + \dots + A_1)] \times (1 + i \times t) \quad [XXXIV]$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elaborase a planilha de amortização, conforme Quadro 18:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	84.310,28
2	25.689,72	4.281,62	21.408,10	66.285,13
3	25.689,72	5.928,40	19.761,32	46.119,17
4	25.689,72	7.339,92	18.349,80	23.977,07
5	25.689,72	8.563,24	17.126,48	zero
<b>Σ</b>	128.448,61	28.448,61	100.000,00	320.691,65

Quadro 18: Prestações constantes – Empréstimos distintos (simples).  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe no sistema de amortização com base na equivalência em juros simples - Quadro 18, os juros de cada período não são calculados sobre o saldo devedor anterior, em razão de vencer a termo e não admitir fracionamento de prazo, e sim sobre o valor de cada empréstimo na data zero, que não contém juros. O saldo devedor de cada período é obtido por meio de equivalência na data zero, única data em que um valor não contém juro, determinando-se o montante de juros simples do saldo entre os valores presentes dos empréstimos - como se fosse único - e as amortizações havidas; portanto, fica comprovada a inexistência de juros sobre juros, ratificando que o sistema Price não se efetiva no regime de capitalização simples.

Enfatize-se que não é conceitualmente correto fazer incidir a taxa sobre o saldo devedor anterior, para argumentar que o empréstimo não foi totalmente liquidado, restando um saldo a pagar de \$ 4.212,68; porquanto, a taxa está sendo aplicada sobre base diferente daquela definida no sistema e no regime, em razão da cindibilidade de prazo. Se a taxa incidir sobre o saldo devedor anterior, a capitalização deixa de ser simples, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO e EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, além de o sistema Price e sistema de amortização a juros compostos, fazendo analogia com sistema de amortização a juros simples.

Da mesma forma, atente-se ao fato de que a equivalência na capitalização simples ocorre somente na data zero, conforme comprovação matemática [4.2.1]. Portanto, é conceitualmente incorreto proceder à equivalência na data cinco, concluindo que o valor do empréstimo não foi remunerado de forma equânime ao montante das parcelas, aplicadas tanto a juros simples como compostos, favorecendo ao credor.

Considerando que não há aplicação de parcelas a juros simples, a não ser que se faça uma a uma, com vencimento a termo, **o sistema de amortização a juros simples evidencia-se não adequado como decisão financeira, tanto do ponto de vista matemático, como de gestão;** porquanto, não há equivalência financeira entre a captação de recursos a juros compostos,

Caderneta de Poupança e FGTS – Fundo de Garantia por Tempo de Serviço, por exemplo, e aplicação a juros simples.

Ao se liquidar antecipadamente prestações no regime de juros simples, os valores a serem pagos devem levar em consideração os juros embutidos em cada prestação (montante): o valor do dinheiro no tempo. Se, porventura, for antecipado em um mês o pagamento de uma prestação, deve-se determinar o valor presente da prestação um mês antes; se for antecipado em dois meses, deve-se determinar o valor presente da prestação dois meses antes, e assim por diante, como demonstrado:

Antecipando o pagamento de prestação em um mês:

$$VP_1 = \frac{25.689,72}{(1 + 0,10 \times 1)} \Rightarrow 23.354,29$$

$$J_1 = \text{desconto racional} = 2.335,43$$

Antecipando o pagamento de prestação em dois meses:

$$VP_2 = \frac{25.689,72}{(1 + 0,10 \times 2)} \Rightarrow 21.408,10$$

$$J_2 = \text{desconto racional} = 4.281,62$$

Antecipando o pagamento de prestação em três meses:

$$VP_3 = \frac{25.689,72}{(1 + 0,10 \times 3)} \Rightarrow 19.761,32$$

$$J_3 = \text{desconto racional} = 5.928,40$$

Destaque-se que, ao considerar o valor do dinheiro no tempo, os saldos devedores e as amortizações, quando do pagamento das próximas prestações, ficam exatamente os mesmos, sendo o empréstimo integralmente liquidado no pagamento da última prestação.

### **Confirmação 3**

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, determinam-se os saldos devedores após o pagamento de cada prestação, na capitalização composta e capitalização simples, respectivamente.

### Capitalização composta

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.2, a equivalência na capitalização composta pode ser efetivada em qualquer data focal. Portanto, o saldo devedor em qualquer período nada mais é do que o valor presente das parcelas vincendas, ou seja, valor presente de série uniforme postecipada.

Entretanto, para proceder à analogia com a capitalização simples, o saldo devedor será também determinado por meio de equivalência. Para isso, é adotada a data zero como focal, ou seja, determina-se o valor presente das parcelas vincendas, na data zero, e capitaliza-se, de forma composta, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

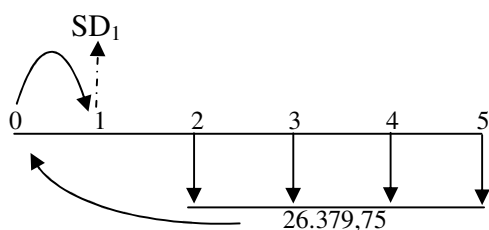
- Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação

Valor presente das quatro prestações vincendas:

$$SD_1 = 26.379,75 \times \frac{(1 + 0,10)^4 - 1}{(1 + 0,10)^4 \times 0,10}$$

$$SD_1 = 83.620,25$$

Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente das quatro prestações vincendas e capitaliza-se um período, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{26.379,75}{(1 + 0,10)^2} + \frac{26.379,75}{(1 + 0,10)^3} + \frac{26.379,75}{(1 + 0,10)^4} + \frac{26.379,75}{(1 + 0,10)^5}$$

$$SD_0 = 76.018,41$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + 0,10)^1 \rightarrow \mathbf{83.620,25}$$

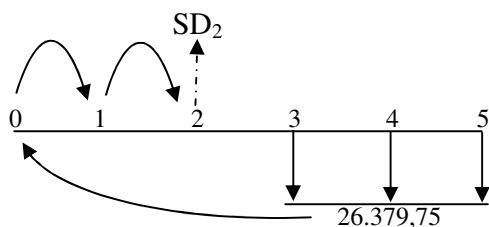
- Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação:

Valor presente das três prestações vincendas:

$$SD_2 = 26.379,75 \times \frac{(1+0,10)^3 - 1}{(1+0,10)^3 \times 0,10}$$

$$SD_2 = 65.602,53$$

Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente das três prestações vincendas<sup>6</sup> e capitalizam-se dois períodos, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^3} + \frac{26.379,75}{(1+0,10)^4} + \frac{26.379,75}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 54.216,97$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^2 \rightarrow \mathbf{65.602,53}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação:

Valor presente das duas prestações vincendas:

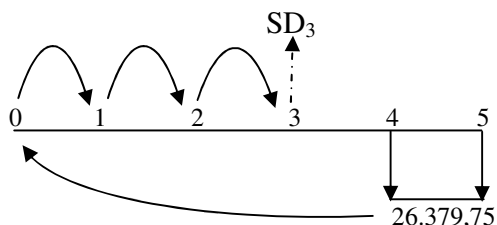
$$SD_3 = 26.379,75 \times \frac{(1+0,10)^2 - 1}{(1+0,10)^2 \times 0,10}$$

$$SD_3 = 45.783,03$$

<sup>6</sup> Pode ser também obtido por meio do cálculo do valor presente de série diferida [XVII].



Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente das duas prestações vincendas e capitalizam-se três períodos, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^4} + \frac{26.379,75}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 34.397,47$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10)^3 \rightarrow \mathbf{45.783,03}$$

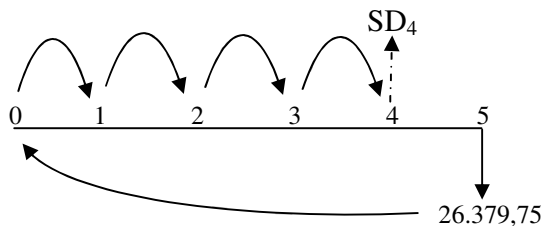
- Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação:

Valor presente da última prestação vincenda:

$$SD_4 = 26.379,75 \times \frac{(1+0,10)^1 - 1}{(1+0,10)^1 \times 0,10}$$

$$SD_4 = 23.981,59$$

Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente da última prestação vincenda e capitalizam-se quatro períodos, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{26.379,75}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 16.379,75$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1+0,10)^4 \rightarrow \mathbf{23.981,59}$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma composta até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 19:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	26.379,75	2.398,16	23.981,59	76.018,41	83.620,25
2	26.379,75	4.578,30	21.801,44	54.216,97	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	34.397,47	45.783,03
4	26.379,75	8.362,03	18.017,72	16.379,75	23.981,59
5	26.379,75	10.000,00	16.379,75	zero	zero
<b>Σ</b>	<b>131.898,74</b>	<b>31.898,74</b>	<b>100.000,00</b>	<b>281.012,60</b>	<b>318.987,40</b>

Quadro 19: Tabela Price – Saldo devedor na data zero, capitalizado (composto).

Fonte: Elaborado pelo autor

Como cientificamente demonstrado no item 4.2.2, a capitalização composta permite o fracionamento de prazo, possibilitando realizar a equivalência em qualquer data focal. Entretanto, para se fazer analogia com a capitalização simples, em que é obrigatória a equivalência na data zero, será adotada essa mesma data focal. Como se constata nos cálculos dos quatro saldos devedores, a taxa de juros incide sempre sobre o resultado do valor total do empréstimo menos as amortizações havidas, na data zero, capitalizando de forma composta até a data do saldo devedor pretendido, comprovando a existência de juros vencidos e não pagos no saldo devedor. Portanto, ratifica-se que o sistema Price se efetiva no regime composto de capitalização.

Destaque-se que, ao se determinar o valor presente das parcelas vincendas, os juros constantes dessas parcelas foram desembutidos. Portanto, nada há de juro futuro no saldo devedor determinado.

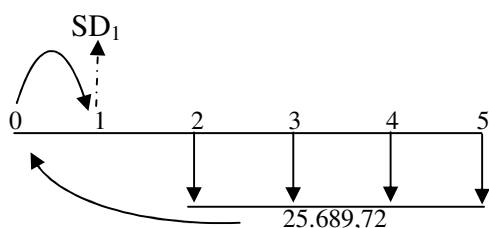
No entanto, constata-se que todos os saldos devedores contêm juros anteriores à data do saldo devedor determinado; portanto, juros vencidos e não pagos, e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta, pelo surgimento dos fatores de

capitalização:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$  e  $(1,10)^4$ . Como a taxa de juros incide sempre sobre juros anteriores à data base de cálculo, a incidência da taxa de juros se dá sobre juros vencidos e não pagos, característica da capitalização composta.

### Capitalização simples

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.1, a equivalência na capitalização simples tem que ser efetivada obrigatoriamente na data focal zero, ou seja, determina-se o valor presente das parcelas vincendas, na data zero, e capitaliza-se, de forma simples, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

- Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação: determina-se o valor presente (data zero) das quatro prestações vincendas e capitaliza-se um período, conforme fluxo:

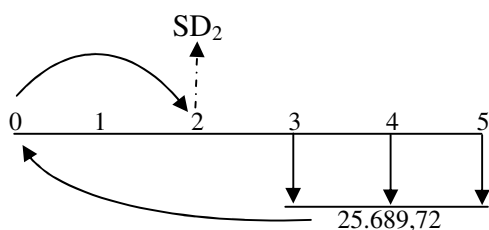


$$SD_0 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 76.645,70$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + 0,10 \times 1) \rightarrow \mathbf{84.310,27}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação: determina-se o valor presente (data zero) das três prestações vincendas e capitalizam-se dois períodos, conforme fluxo:

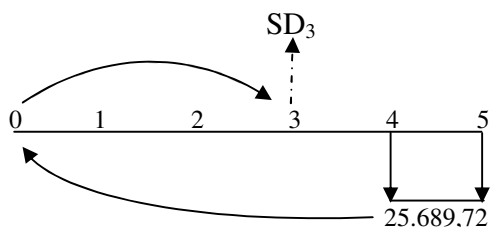


$$SD_0 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 55.237,60$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10 \times 2) \rightarrow \mathbf{66.285,13}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação: determina-se o valor presente (data zero) das duas prestações vincendas e capitalizam-se três períodos, conforme fluxo:

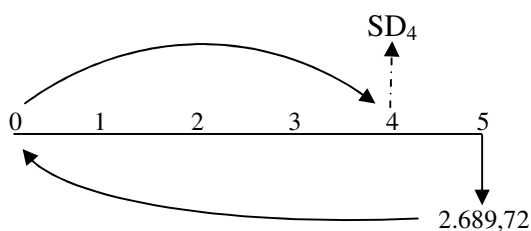


$$SD_0 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 35.476,28$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10 \times 3) \rightarrow \mathbf{46.119,17}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação: determina-se o valor presente (data zero) da prestação vincenda e capitalizam-se quatro períodos, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{25.689,72}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 17.126,48$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1+0,10 \times 4) \rightarrow \mathbf{23.977,07}$$

Depois de calculados os elementos componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma simples até a data do período de um saldo devedor pretendido, **sem fracionamento de prazo**, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 20:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	25.689,72	2.335,43	23.354,29	76.645,71	84.310,28
2	25.689,72	4.281,62	21.408,10	55.237,60	66.285,13
3	25.689,72	5.928,40	19.761,32	35.476,28	46.119,17
4	25.689,72	7.339,92	18.349,80	17.126,48	23.977,07
5	25.689,72	8.563,24	17.126,48	zero	zero
<b>Σ</b>	<b>128.448,60</b>	<b>28.448,61</b>	<b>100.000,00</b>	<b>284.486,07</b>	<b>320.691,65</b>

Quadro 20: Tabela Price – Saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).

Fonte: Elaborado pelo autor

Como já cientificamente demonstrado no item 4.2.1, a capitalização simples não permite o fracionamento de prazo, vencendo a termo, razão de a equivalência ter de ser realizada na data focal zero. Como se constata nos cálculos dos saldos devedores, embora contenham juros devidos (vencidos) e não pagos, não servem de base para o cálculo dos juros periódicos; pois, a taxa de juros simples incide sempre sobre o resultado do valor total dos empréstimos menos as amortizações havidas, na data zero, descaracterizando a incidência de juros sobre juros. Além disso, o surgimento dos fatores de capitalização simples (1,10); (1,20); (1,30); (1,40) e (1,50) comprovam esse regime de capitalização, ratificando que o Sistema Price não se efetiva no regime de capitalização simples.

#### **Confirmação 4**

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, por meio da elaboração de planilhas nos sistemas de amortização com base na equivalência em juros simples e em juros compostos, determinando os respectivos juros e demais componentes dos sistemas de amortização, período a período, para caracterizar os dois regimes de capitalização e comparar com o sistema de amortização Price.

### Capitalização simples

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, com base nas parcelas constantes no sistema de amortização no regime simples, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos e Price.

A referida planilha está apresentada no Quadro 21. Resgate-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o FCD para se obter as prestações, o saldo devedor não é obtido pela diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim pelo saldo devedor anterior e respectivos juros, menos os valores pagos, ou o valor presente das prestações vincendas, na data em que se pretende obter o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS SIMPLES PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1	23.354,29	2.335,43					2.335,43	25.689,72	84.310,28
2	21.408,10	2.140,81	2.140,81				4.281,62	25.689,72	66.285,13
3	19.761,32	1.976,13	1.976,13	1.976,13			5.928,40	25.689,72	46.119,17
4	18.349,80	1.834,98	1.834,98	1.834,98	1.834,98		7.339,92	25.689,72	23.977,07
5	17.126,48	1.712,65	1.712,65	1.712,65	1.712,65	1.712,65	8.563,24	25.689,72	zero
Σ	100.000,00	10.000,00	7.664,57	5.523,76	3.547,63	1.712,65	28.448,61	128.448,61	320.691,65

Quadro 21: Tabela Price – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 21, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais a \$ 25.689,72 é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro simples do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São constantes em cada período, em razão de a taxa de juros incidir sempre sobre a mesma base, igual ao valor do empréstimo, caracterizando o regime simples de capitalização, como se constata:

#### 1º Empréstimo

$$C_1 = 23.354,29$$

$$J_1 = 23.354,29 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.335,43$$

#### 2º Empréstimo

$$C_1 = 21.408,10$$

$$J_1 = 21.408,10 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.140,81$$

$$C_2 = 21.408,10$$

$$J_2 = 21.408,10 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = \frac{2.140,81}{4.281,62}$$

### 3º Empréstimo

$$C_1 = 19.761,32$$

$$J_1 = 19.761,32 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 1.976,13$$

$$C_2 = 19.761,32$$

$$J_2 = 19.761,32 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = 1.976,13$$

$$C_3 = 19.761,32$$

$$J_3 = 19.761,32 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_3 = \frac{1.976,13}{5.928,39}$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o **total de juros devidos** de \$ 10.000,00, correspondentes ao somatório de todos os juros simples relativos ao primeiro mês de cada um dos cinco empréstimos. Portanto, a única hipótese de \$ 10.000,00 serem os juros do primeiro mês é se o empréstimo fosse totalmente liquidado por \$ 110.000,00, no final desse período.

Entretanto, evidencie-se que ao se pagar a primeira prestação de \$ 25.689,72, está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 23.354,29, com respectivos juros simples de \$ 2.335,43; ao se pagar a segunda prestação de \$ 25.689,72, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 21.408,10, com respectivos juros simples de \$ 4.281,62, sendo \$ 2.140,81 do 1º mês e \$ 2.140,81 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, além dos respectivos juros simples pelo prazo de um mês decorrido:

$$\text{Empréstimos remanescentes: } 21.408,10 + 19.761,32 + 18.349,80 + 17.126,48 = 76.645,71$$

$$\text{Respectivos juros, vencidos: } 2.140,81 + 1.976,13 + 1.834,98 + 1.712,65 = 7.664,57.$$

$$\text{Saldo devedor: } 76.645,71 + 7.664,57 = \mathbf{84.310,28}$$

- Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, além dos respectivos juros simples pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $19.761,32 + 18.349,80 + 17.126,48 = 55.237,61$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.976,13 + 1.834,98 + 1.712,65 = 5.523,76$

2º mês:  $1.976,13 + 1.834,98 + 1.712,65 = 5.523,76$

Saldo devedor:  $55.237,61 + 5.523,76 + 5.523,76 = \mathbf{66.285,13}$

- Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, além dos respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $18.349,80 + 17.126,48 = 35.476,28$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.834,98 + 1.712,65 = 3.547,63$

2º mês:  $1.834,98 + 1.712,65 = 3.547,63$

3º mês:  $1.834,98 + 1.712,65 = 3.547,63$

Saldo devedor:  $35.476,28 + 3.547,63 + 3.547,63 + 3.547,63 = \mathbf{46.119,17}$

- Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, além dos respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes: 17.126,48

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 1.712,65

2º mês: 1.712,65

3º mês: 1.712,65

4º mês: 1.712,65

Saldo devedor:  $17.126,48 + 1.712,65 + 1.712,65 + 1.712,65 + 1.712,65 = \mathbf{23.977,07}$



Ao decompor os saldos devedores após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros simples. Entretanto, como ficou caracterizado, a taxa não incide sobre esses saldos devedores, como na Tabela Price, e sim sobre o valor de cada empréstimo, demonstrando matematicamente que o Sistema Price não se realiza no regime de capitalização simples.

### Capitalização composta

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, com base nas parcelas constantes no sistema de amortização no regime composto de capitalização, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema Price.

A referida planilha é apresentada no Quadro 22. Resgate-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o FCD para se obter as prestações, o saldo devedor não é obtido pela diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim pelo saldo devedor anterior e respectivos juros, menos os valores pagos, ou o valor presente das prestações vincendas, na data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1	23.981,59	2.398,16					2.398,16	26.379,75	83.620,25
2	21.801,44	2.180,14	2.398,16				4.578,30	26.379,75	65.602,53
3	19.819,50	1.981,95	2.180,14	2.398,16			6.560,25	26.379,75	45.783,03
4	18.017,72	1.801,77	1.981,95	2.180,14	2.398,16		8.362,03	26.379,75	23.981,59
5	16.379,75	1.637,98	1.801,77	1.981,95	2.180,14	2.398,16	10.000,00	26.379,75	zero
Σ	100.000,00	10.000,00	8.362,03	6.560,25	4.578,30	2.398,16	31.898,74	131.898,74	318.987,40

Quadro 22: Tabela Price – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 22, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais a \$ 26.379,75, determinadas conforme Sistema Price, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, da mesma forma que o total de juros. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro composto do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São crescentes geometricamente, em razão da incidência da taxa de juros sobre juros formados nos períodos anteriores, caracterizando o regime composto de capitalização, como se constata:

1º Empréstimo

$$C_1 = 23.981,59$$

$$J_1 = 23.981,59 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.398,16$$

2º Empréstimo

$$C_1 = 21.801,44$$

$$J_1 = 21.801,44 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.180,14$$

$$C_2 = 21.801,44 + 2.180,14 = 23.981,58$$

$$J_2 = 23.981,58 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = \frac{2.398,16}{4.578,30}$$

3º Empréstimo

$$C_1 = 19.819,50$$

$$J_1 = 19.819,50 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 1.981,95$$

$$C_2 = 19.819,50 + 1.981,95 = 21.801,44$$

$$J_2 = 21.801,44 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = 2.180,14$$

$$C_3 = 21.801,44 + 2.180,14 = 23.981,58$$

$$J_3 = 23.981,58 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_3 = \frac{2.398,16}{6.560,25}$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o **total de juros devidos** de \$ 10.000,00, correspondentes ao somatório de todos os juros compostos relativos ao primeiro mês de cada empréstimo. Portanto, a única hipótese de \$ 10.000,00 serem os juros do primeiro mês é se o empréstimo fosse totalmente liquidado por \$ 110.000,00, no final desse período.

Entretanto, evidencie-se que ao se pagar a primeira prestação de \$ 26.379,75, está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 23.981,59, com respectivos juros de \$ 2.398,16; ao pagar-se a segunda prestação de \$ 26.379,75, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 21.801,44, com respectivos juros de \$ 4.578,30, sendo \$ 2.180,14 do 1º mês e \$ 2.398,16 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, além dos respectivos juros compostos pelo prazo de um mês decorrido:

Empréstimos remanescentes:  $21.801,44 + 19.819,50 + 18.017,72 + 16.379,75 = 76.018,41$

Respectivos juros, vencidos:  $2.180,14 + 1.981,95 + 1.801,77 + 1.637,98 = 7.601,84$ .

Saldo devedor:  $76.018,41 + 7.601,84 = \mathbf{83.620,25}$

- Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, além dos respectivos juros compostos pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $19.819,50 + 18.017,72 + 16.379,75 = 54.216,97$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.981,95 + 1.801,77 + 1.637,98 = 5.421,70$

2º mês:  $2.180,14 + 1.981,95 + 1.801,77 = 5.963,86$

Saldo devedor:  $54.216,97 + 5.421,70 + 5.963,86 = \mathbf{65.602,53}$

- Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, além dos respectivos juros compostos pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $18.017,72 + 16.379,75 = 34.397,47$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.801,77 + 1.637,98 = 3.439,75$ .

2º mês:  $1.981,95 + 1.801,77 = 3.783,72$

3º mês:  $2.180,14 + 1.981,95 = 4.162,09$

Saldo devedor:  $34.397,47 + 3.439,75 + 3.783,72 + 4.162,09 = \mathbf{45.783,03}$

- Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, além dos respectivos juros compostos pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes: 16.379,75

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 1.637,98.

2º mês: 1.801,77

3º mês: 1.981,95

4º mês: 2.180,14

Saldo devedor:  $16.379,75 + 1.801,77 + 1.981,95 + 2.180,14 = \mathbf{23.981,59}$

Ao decompor os saldos devedores, após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros vencidos e não pagos, e como a taxa de juros incide sobre esses saldos, fica matematicamente comprovado que a capitalização composta está caracterizada na Tabela Price.

## 5.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

A denominação SAC origina-se de sua principal característica, que é amortizar o valor do empréstimo de forma constante e periódica, fazendo com que a taxa efetiva de juros incida sobre um saldo devedor decrescente a essa constante. Por conseqüência, os juros e as prestações também decrescem a um valor constante, caracterizando uma progressão aritmética, cuja razão é o resultado da multiplicação do valor dessa amortização constante pela taxa efetiva periódica.

**Essa característica de decréscimo em progressão aritmética do saldo devedor, da prestação e dos juros tem proporcionado a ilusão de que o sistema SAC se desenvolve na capitalização simples.** Há, inclusive, decisão judicial determinando a substituição da Tabela Price, porque alberga a capitalização de juros, pelo SAC<sup>7</sup>.

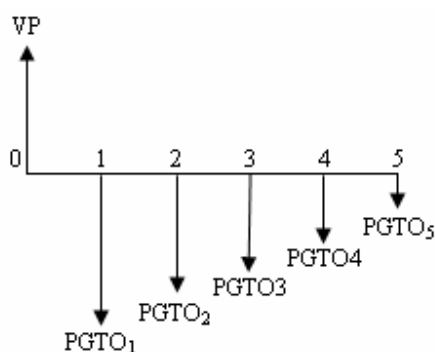
O valor da prestação, como em todo sistema de amortização, é resultado da soma da parcela de capital (amortização) e encargos financeiros (juros), os quais são determinados pela incidência da taxa efetiva periódica sobre o saldo devedor anterior. Conforme já mencionado, no SFH, como de maneira geral nos repasses do Governo Federal, a taxa é apresentada na forma nominal, normalmente em ano, com os juros sendo capitalizados mensalmente, de acordo com o período das prestações.

Para maior clareza, tome-se como exemplo um empréstimo de valor igual a **VP** (valor presente), que será liquidado em **n** prestações periódicas e decrescentes, com a primeira a ser

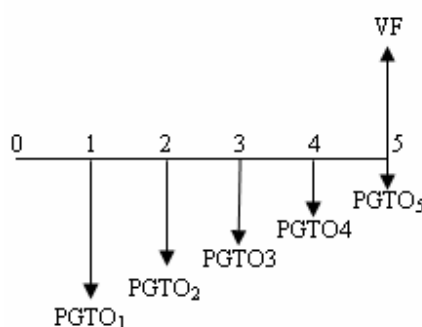
<sup>7</sup> Na íntegra: <http://conjur.estadao.com.br//static/text/43561,1>

paga no final do primeiro período, a uma taxa efetiva de juros de  $i$  por período igual ao das parcelas, e determine-se o valor de cada prestação periódica (PGTO), para elaboração do fluxo de caixa e planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



Se determinado em função do valor futuro, pode ser assim representado:



Observe-se que esse fluxo está de acordo com o modelo de fluxo de caixa periódico, não-uniforme ou não-homogêneo, postecipado, desenvolvido no item 2.2.3, em que o valor presente ocorre um período antes da primeira prestação e o valor futuro na mesma data da última.

Depois de determinado o valor constante das amortizações, e obedecendo as características do SAC, a planilha de amortização pode ser elaborada, conforme Quadro 23:

Período	Amortização	Juro devido	Prestação	Saldo devedor
0				$VP = SD_0$
1	$A = VP/n$	$J_1 = SD_0 \times i$	$PGTO_1 = A + J_1$	$SD_1 = SD_0 - A$
2	$A = VP/n$	$J_2 = SD_1 \times i$	$PGTO_2 = A + J_2$	$SD_2 = SD_1 - A$
3	$A = VP/n$	$J_3 = SD_2 \times i$	$PGTO_3 = A + J_3$	$SD_3 = SD_2 - A$
k	$A = VP/n$	$J_k = SD_{k-1} \times i$	$PGTO_k = A + J_k$	$SD_k = SD_{k-1} - A$
n	$A = VP/n$	$J_n = SD_{n-1} \times i$	$PGTO_n = A + J_n$	$SD_n = SD_{n-1} - A$

Quadro 23: Sistema SAC – Planilha-formulário

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa, ao final do 1º período são exigidos juros à taxa efetiva periódica  $i$ , que incidirá sobre o saldo devedor do período anterior, igual ao valor do empréstimo  $VP = SD_0$  (saldo devedor na data zero):

$$J_1 = SD_0 \times i$$

O pagamento da primeira prestação liquidará esse juro ( $J_1$ ) e amortizará a diferença ( $A_1$ ):

$$A_1 = PGTO_1 - J_1$$

Substituindo  $J_1$ , tem-se:

$$A_1 = PGTO_1 - SD_0 \times i$$

Conseqüentemente, o saldo devedor ( $SD_1$ ) ficará reduzido a:

$$SD_1 = SD_0 - A_1$$

Substituindo  $A_1$ , tem-se:

$$SD_1 = SD_0 - (PGTO_1 - SD_0 \times i)$$

Aplicando a propriedade distributiva e fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$

Ao final do 2º período, serão exigidos novos juros sobre esse  $SD_1$ :

$$J_2 = SD_1 \times i$$

Substituindo  $A_1$ , tem-se:  $J_2 = [SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1] \times i$

Aplicando a propriedade distributiva, obtém-se:

$$J_2 = SD_0 \times i + SD_0 \times i^2 - PGTO_1 \times i \longrightarrow \text{caracterização do juro composto}$$

A capitalização composta está caracterizada por meio do surgimento de  $i^2$ , resultado da incidência de **juros sobre os juros existentes no saldo devedor anterior**, devidos (vencidos) e não pagos, característica da capitalização composta. Essa relação é aplicável a qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre o saldo devedor.

Procedendo ao mesmo desenvolvimento efetuado no Sistema Francês de Amortização – Tabela Price [XXVII], item 4.3.1, concluí-se que o saldo devedor de um período qualquer, quando a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, independe do valor do juro e da amortização.

Isso quer dizer que **o juro e a amortização podem tomar qualquer valor, inclusive constante, como no caso do SAC**, desde que a soma dos dois seja igual ao valor da prestação do período e o total das amortizações seja igual ao valor do empréstimo; pois, não altera os valores do fluxo de pagamentos e do saldo devedor.

Logo, a incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior para determinar os juros do período e a amortização pela diferença deste com o valor da prestação são meras convenções adotadas pelos idealizadores dos sistemas para facilitar a compreensão e agilizar os cálculos; porquanto a matemática financeira considera o valor do empréstimo e as prestações para liquidá-lo, entradas e saídas do fluxo de caixa, não importando se a título de juros ou de amortização.

Portanto, em qualquer período, o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior, acrescido do juro do período, e subtraído da prestação. Considerando que o saldo devedor inicial ( $SD_0$ ) é igual ao valor do empréstimo ( $VP$ ) e que o saldo devedor ( $SD_t$ ), após o pagamento da última prestação ( $PGTO_t$ ), é igual a zero, tem-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1 + i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = [SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1] \times (1 + i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO_1 \times (1 + i) - PGTO_2 \quad \longrightarrow \text{caracterização do juro composto}$$

Ao se considerar genericamente  $SD_t$  como o saldo devedor no final de um período  $t$ , sobre esse saldo devedor, ao final do período de ordem  $t$ , qualquer, obtém-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVIII], vista no item 4.3.1 - Tabela Price.

### 5.2.1 Evidências da capitalização composta

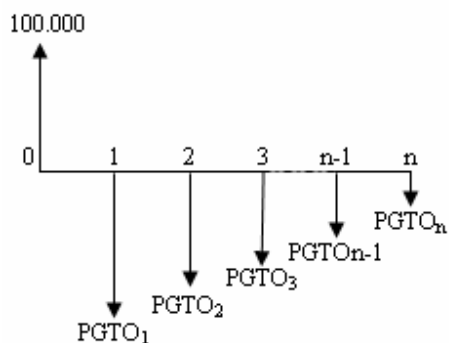
#### (a) Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes

Só há dois regimes de capitalização: simples e composto. Se não é simples, obrigatoriamente, será composto e vice-versa.

Para melhor compreender e cotejar com a capitalização simples e com os outros sistemas de amortização, admita-se o mesmo exemplo desenvolvido na Tabela Price: um empréstimo de \$ 100.000,00 (**VP**), a ser liquidado em cinco (**t**) prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa de juros de 10% ao mês (**i**) e determine-se a amortização periódica constante, considerando: (1)

**Sistema de Amortização Constante - SAC; (2) Equivalência em Juros compostos e (3) Equivalência em Juros Simples.**

O fluxo de caixa desse empréstimo é assim representado:



**(1) SAC**

Considerando que o empréstimo será amortizado em parcelas constantes, o valor da amortização é determinado pela simples divisão do valor do empréstimo pelo total de prestações, a saber:

$$A = \frac{100.000}{5} \rightarrow A = 20.000$$

**(2) Equivalência em Juros compostos**

Como já demonstrado na capitalização composta (4.2.2), a equivalência poderá ser efetivada em qualquer data focal. Sendo assim, será adotada a data zero para poder comparar com a capitalização simples, bem como coincidir com os padrões das calculadoras financeiras e da literatura. Utilizando a fórmula para cálculo do valor presente de séries não-uniformes [XIX] e mantendo-se os valores das prestações do SAC, tem-se como consequência a seguinte equação de valor:

$$VP = \frac{PGTO_1}{(1+i)^1} + \frac{PGTO_2}{(1+i)^2} + \frac{PGTO_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i)^n}$$

Para se calcular o valor de determinada prestação, por exemplo, a segunda, obtém-se a seguinte equação:



$$PGTO_2 = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i)^1} + \frac{PGTO_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i)^n} \right) \right] \times (1+i)^2$$

Observa-se que, ao se isolar a segunda prestação, a série fica sem essa prestação dividida pelo respectivo fator de descapitalização e, depois de deduzido do valor do empréstimo (VP), multiplicada pelo respectivo fator de capitalização. Essa rotina ocorre quando do cálculo de qualquer prestação do presente sistema de amortização.

A partir dessa lógica, pode-se obter a fórmula genérica para o cálculo de determinada prestação de ordem t, qualquer, da seguinte forma:

$$PGTO_t = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i)^1} + \frac{PGTO_2}{(1+i)^2} + \frac{PGTO_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i)^n} \right) \right] \times (1+i)^t \quad \text{[XXXIII]}$$

Considerando-se que o valor da amortização é igual à diferença entre o valor da prestação e dos juros do período, tem-se:

$$A = PGTO_t - J_t \quad \rightarrow \quad J_t = SD_{t-1} \times i \quad \rightarrow \quad A = PGTO_t - SD_{t-1} \times i$$

Ao substituir  $PGTO_t$  pela equação correspondente, obtém-se:

$$A_t = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i)^1} + \frac{PGTO_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i)^n} \right) \right] \times (1+i)^t - SD_{t-1} \times i \quad \text{[XXXIV]}$$

Para fins de comprovação matemática dessa fórmula, a partir do cálculo da amortização constante, dos juros de cada período e respectiva prestação, bem como do saldo devedor após o pagamento de cada prestação, conforme cálculos discriminados no Quadro 22, elaborou-se a planilha de amortização do SAC no Quadro 24, a seguir:

Período	Amortização	Juro devido	Prestação	Saldo devedor
0				100.000
1	20.000	10.000	30.000	80.000
2	20.000	8.000	28.000	60.000
3	20.000	6.000	26.000	40.000
4	20.000	4.000	24.000	20.000
5	20.000	3.000	22.000	zero

Quadro 24: Sistema SAC – Planilha tradicional  
Fonte: Elaborado pelo autor

$$A_3 = \left[ 100.000 - \frac{30.000}{(1+0,10)^1} + \frac{26.000}{(1+0,10)^3} + \dots + \frac{22.000}{(1+0,10)^5} \right] \times (1+0,10)^2 - 80.000 \times 0,10$$

$$A_3 = 20.000$$

Conforme comprovado cientificamente em [4.2.2], o regime de juros compostos, diferentemente do regime de juros simples, permite pagamento de partes do capital, por admitir o fracionamento de prazo. Independentemente disso, com o intuito de poder comparar com a capitalização simples e aplicando o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos individuais, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 30.000,00; \$ 28.000,00; R\$ 26.000,00; R\$ 24.000,00 e R\$ 22.000,00, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente), considerando do valor do dinheiro no tempo. A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo, como se constata:

$$VP_1 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^1} \rightarrow 27.272,73$$

$$VP_2 = \frac{28.000,00}{(1+0,10)^2} \rightarrow 23.140,50$$

$$VP_3 = \frac{26.000,00}{(1+0,10)^3} \rightarrow 19.534,18$$

$$VP_4 = \frac{24.000,00}{(1+0,10)^4} \rightarrow 16.392,32$$

$$VP_5 = \frac{22.000,00}{(1+0,10)^5} \rightarrow 13.660,27$$

Como restou comprovado cientificamente, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 27.272,73; \$ 23.140,50; \$ 19.534,18; \$ 16.392,32 e \$ 13.660,27, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco pagamentos

postecipados mensais de valores iguais a \$ 30.000,00; \$ 28.000,00; \$ 26.000,00; \$ 24.000,00 e \$ 22.000,00, no regime de juros compostos, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

Da mesma forma, entendendo-se como se fossem cinco empréstimos, porém mantendo-se o valor das amortizações do SAC, como consequência, tem-se as seguintes prestações:

$$PGTO_1 = 20.000 \times (1+0,10)^1 \rightarrow 22.000,00$$

$$PGTO_2 = 20.000 \times (1+0,10)^2 \rightarrow 24.200,00$$

$$PGTO_3 = 20.000 \times (1+0,10)^3 \rightarrow 26.620,00$$

$$PGTO_4 = 20.000 \times (1+0,10)^4 \rightarrow 29.282,00$$

$$PGTO_5 = 20.000 \times (1+0,10)^5 \rightarrow 32.210,20$$

Como se constata, na capitalização composta, considerando o valor do dinheiro no tempo e o valor das amortizações constantes, os valores dos pagamentos mensais são crescentes em progressão geométrica, cuja razão é o quociente entre prestação e prestação anterior, ou seja,  $(1+0,10)$ , correspondente a um crescimento de 10%. Note-se que, em razão de os desembolsos serem menores no seu início, **o total de juros pagos será maior que o do SAC e do sistema com cinco empréstimos individuais**, quando se mantêm as prestações do SAC; porém, **o custo de capital é exatamente o mesmo nos três casos**.

### (3) Equivalência em Juros simples

Para melhor compreender e cotejar com a capitalização composta, admita-se o mesmo exemplo e calcule-se a amortização, tendo o **juro simples como regime de capitalização**.

Como já demonstrado na capitalização simples (4.2.1), a equivalência deverá ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como focal, tendo como consequência a seguinte configuração:

$$VP = \frac{PGTO_1}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO_2}{(1+i \times 2)} + \frac{PGTO_3}{(1+i \times 3)} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i \times n)}$$

$$VP = \frac{30.000}{(1+i \times 1)} + \frac{28.000}{(1+i \times 2)} + \frac{26.000}{(1+i \times 3)} + \frac{24.000}{(1+i \times 4)} + \frac{22.000}{(1+i \times 5)}$$

$$VP = 102.415,58$$

Portanto, se a capitalização dos juros for simples, as cinco referidas prestações mensais e decrescentes liquidariam um empréstimo único de R\$ 102.415,58. Para se calcular o valor de determinada prestação, por exemplo, a segunda, obtém-se a seguinte equação:

$$PGTO_2 = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO_3}{(1+i \times 3)} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i \times n)} \right) \right] \times (1+i \times 2)$$

Observa-se que, ao se isolar a segunda prestação, a série fica sem essa prestação multiplicada pelo respectivo fator de descapitalização e, depois de deduzido do valor do empréstimo (VP), multiplicada pelo respectivo fator de capitalização simples. Essa rotina ocorre quando do cálculo de qualquer prestação do sistema.

A partir dessa lógica, pode-se obter a fórmula genérica para o cálculo de determinada prestação de ordem t, qualquer, da seguinte forma:

$$PGTO_t = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO_2}{(1+i \times 2)} + \frac{PGTO_3}{(1+i \times 3)} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i \times n)} \right) \right] \times (1+i \times t) \quad [XXXV]$$

Considerando-se que o valor da amortização é igual à diferença entre ao valor da prestação e dos juros do período, e que o juro do período é o juro simples do empréstimo de ordem t, tem-se:

$$A = PGTO_t - J_t \rightarrow J_t = VP_t \times i \times t \rightarrow A = PGTO_t - VP_t \times i \times t$$

Ao substituir  $PGTO_t$  pela equação correspondente, obtém-se:

$$A_t = \left[ VP - \left( \frac{PGTO_1}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO_2}{(1+i \times 2)} + \dots + \frac{PGTO_n}{(1+i \times n)} \right) \right] \times (1+i \times t) - VP_t \times i \times t \quad [XXXVI]$$

$$A_2 = \left[ 102.415,58 - \frac{30.000}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{26.000}{(1+0,10 \times 3)} + \dots \right] \times (1+0,10 \times 2) - 23.333,33 \times 0,10 \times 2$$

$$A_2 = 23.333,33$$

Como na capitalização simples é obrigatória a constituição de cinco empréstimos individuais, em razão da não possibilidade de fracionamento do prazo, o valor de cada empréstimo será o próprio valor da amortização:

$$A_t = VP_t$$

$$VP_t = \frac{PGTO_t}{(1+it)} \Rightarrow A_2 = \frac{28.000}{(1+0,10 \times 2)}$$

$$A_2 = 23.333,33$$

Considerando a questão conceitual, comprovada cientificamente em [4.2.1], **o regime de juros simples**, diferentemente do regime de juros compostos, **não permite pagamento de partes do capital** de \$ 100.000,00, por não admitir o fracionamento de prazo. **Logo, não há como fazer um único empréstimo para liquidar em parcelas, constantes ou não**. Entretanto, aplicando-se o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos individuais, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 30.000,00; \$ 28.000,00; \$ 26.000,00; \$ 24.000,00 e \$ 22.000,00, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, e a soma de seus valores atuais, na data zero, seria igual ao valor do empréstimo, como se confirma:

$$VP_1 = \frac{30.000}{(1+0,10 \times 1)} \rightarrow 27.272,72$$

$$VP_2 = \frac{28.000,00}{(1+0,10 \times 2)} \rightarrow 23.333,33$$

$$VP_3 = \frac{26.000,00}{(1+0,10 \times 3)} \rightarrow 20.000,00$$

$$VP_4 = \frac{24.000,00}{(1+0,10 \times 4)} \rightarrow 17.142,86$$

$$VP_5 = \frac{22.000,00}{(1+0,10 \times 5)} \rightarrow 14.666,67$$

Como restou comprovado cientificamente, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 27.272,72; \$ 23.333,33; \$ 20.000,00; \$ 17.142,86 e \$ 14.666,67, para liquidação em um, dois,

três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 102.415,58; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco pagamentos postecipados mensais, de valores iguais a \$ 30.000,00; \$ 28.000,00; \$ 26.000,00; \$ 24.000,00 e \$ 22.000,00, no regime de juros simples, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

Em razão de que na capitalização simples a constituição de cinco empréstimos individuais é compulsória, por não ser possível fracionar o prazo, o valor de cada empréstimo é o próprio valor da amortização. Assim sendo, ao se considerarem as amortizações constantes, há que se fazer cinco empréstimos de R\$ 20.000,00, com os seguintes valores de pagamentos (montantes):

$$PGTO_1 = 20.000 \times (1+0,10 \times 1) \rightarrow 22.000,00$$

$$PGTO_2 = 20.000 \times (1+0,10 \times 2) \rightarrow 24.000,00$$

$$PGTO_3 = 20.000 \times (1+0,10 \times 3) \rightarrow 26.000,00$$

$$PGTO_4 = 20.000 \times (1+0,10 \times 4) \rightarrow 28.000,00$$

$$PGTO_5 = 20.000 \times (1+0,10 \times 5) \rightarrow 30.000,00$$

Como se constata, na capitalização simples, considerando o valor do dinheiro no tempo e o valor das amortizações constantes, os valores dos pagamentos mensais são crescentes em progressão aritmética, cuja razão é igual ao resultado da multiplicação do valor dessa amortização pela taxa efetiva periódica. Note-se que o total de juros pagos será o mesmo que o do SAC e do sistema com cinco empréstimos individuais com as prestações do SAC, a juros compostos; porém, com fluxo de caixa de pagamentos de forma invertida, favorecendo financeiramente ao devedor em razão de os desembolsos serem menores no seu início.

### **Confirmação 1**

Conforme comprovado cientificamente, ao se deduzirem as fórmulas por meio da equivalência de fluxos de caixa e determinar o valor das amortizações, a juro simples e a juro composto, seguindo a mesma analogia, e comparar com a amortização constante obtida no SAC, concluí-se:

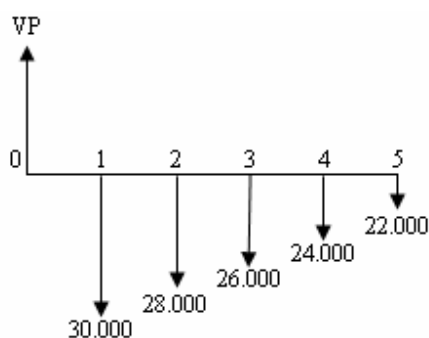
<b>SIMPLES</b>	<b>COMPOSTO</b>	<b>SAC</b>
$\left[ VP - \left( \frac{PG_1}{(1+i)} + \dots + \frac{PG_n}{(1+in)} \right) \right] (1+it) - VP_t \times i t \neq$	$\left[ VP - \left( \frac{PG_1}{(1+i)} + \dots + \frac{PG_n}{(1+i)^n} \right) \right] (1+i)^t - SD_{t-1} \times i =$	$\frac{VP}{n}$

## Confirmação 2

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, a data zero tem de ser adotada como data focal e a mesma analogia para se determinar o valor presente das prestações e o valor presente líquido, no fluxo de caixa comum, considerando duas situações: mantendo-se os valores originais das prestações ou os valores originais das amortizações do SAC.

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAC.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



### Capitalização composta

$$VP = \frac{30.000}{(1+0,10)^1} + \frac{28.000}{(1+0,10)^2} + \frac{26.000}{(1+0,10)^3} + \frac{24.000}{(1+0,10)^4} + \frac{22.000}{(1+0,10)^5}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

### Capitalização simples

$$VP = \frac{30.000}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{28.000}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{26.000}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{24.000}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{22.000}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 102.415,58$$

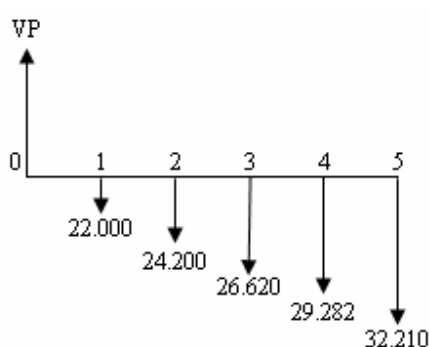
$$VPL = 100.000,00 - 102.415,58 = -2.415,58$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de valores decrescentes em progressão aritmética de razão igual ao produto da amortização constante pela taxa periódica são equivalentes ao valor presente do empréstimo de \$ 100.000,00, à taxa de 10% ao mês, somente se

forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos; porquanto, a juros simples, seriam equivalentes \$ 102.415,58.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos, para a determinação das prestações.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



#### Capitalização composta

$$VP = \frac{22.000,00}{(1+0,10)^1} + \frac{24.200,00}{(1+0,10)^2} + \frac{26.620,00}{(1+0,10)^3} + \frac{29.282,00}{(1+0,10)^4} + \frac{32.210,20}{(1+0,10)^5}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

#### Capitalização simples

$$VP = \frac{22.000,00}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{24.200,00}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{26.620,00}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{29.282,00}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{32.210,20}{(1+0,10 \times 5)}$$

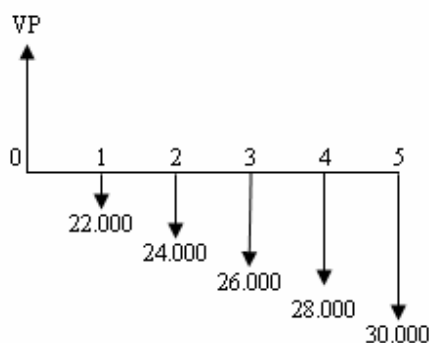
$$VP = 103.032,77$$

$$VPL = 100.000,00 - 103.032,77 = - 3.032,77$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de valores decrescentes em progressão geométrica de razão igual ao quociente da prestação pela prestação anterior são equivalentes a \$ 100.000,00, à taxa de 10% ao mês, somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos; porquanto, a juros simples, seriam equivalentes \$ 103.032,77.



- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples, para determinação das prestações.



#### Capitalização simples

$$VP = \frac{22.000}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{24.000,00}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{26.000,00}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{28.000,00}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{30.000,00}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

#### Capitalização composta

$$VP = \frac{22.000}{(1+0,10)^1} + \frac{24.000}{(1+0,10)^2} + \frac{26.000}{(1+0,10)^3} + \frac{28.000}{(1+0,10)^4} + \frac{30.000}{(1+0,10)^5}$$

$$VP = 97.120,91$$

$$VPL = 100.000,00 - 97.120,91 = 2.879,09$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de valores decrescentes em progressão aritmética de razão igual ao produto da amortização constante pela taxa periódica são equivalentes a \$ 100.000,00, à taxa de 10% ao mês, somente se forem descapitalizadas (descontadas) a juros simples; porquanto, a juros compostos, seriam equivalentes \$ 97.120,91.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros compostos, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se o valor presente líquido

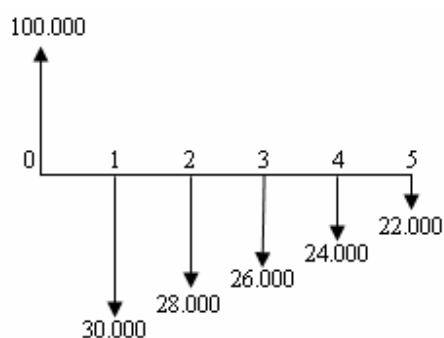
for negativo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros simples, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se o valor presente líquido for positivo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

### Confirmação 3

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, será adotada a data zero como data focal e a mesma analogia para se determinar a taxa periódica de juros, no fluxo de caixa comum, considerando duas situações: mantendo-se os valores originais das prestações do SAC e mantendo-se os valores das amortizações originais do SAC.

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAC.



#### Capitalização composta

$$100.000,00 = \frac{30.000}{(1+i)^1} + \frac{28.000}{(1+i)^2} + \frac{26.000}{(1+i)^3} + \frac{24.000}{(1+i)^4} + \frac{22.000}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira HP 12C, que somente calcula a taxa na capitalização composta, tem-se:

f REG

100.000 CHS g CF<sub>0</sub>

30.000 g CF<sub>j</sub>

28.000 g CF<sub>j</sub>

26.000 g CF<sub>j</sub>

24.000 g CF<sub>j</sub>

25.000 g CF<sub>j</sub>

f IRR      →      10% ao mês

### Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{30.000}{(1+i \times 1)} + \frac{28.000}{(1+i \times 2)} + \frac{26.000}{(1+i \times 3)} + \frac{24.000}{(1+i \times 4)} + \frac{22.000}{(1+i \times 5)}$$

Como não há calculadora ou *softwares* financeiros específicos para determinar a taxa de fluxo de caixa em juros simples, pode-se utilizar o processo de interpolação linear.

Percebe-se na equação que se está buscando a taxa “i%”, tal que o valor presente seja igual a \$ 100.000,00. Ao estimar 11%, por exemplo, obtém-se um valor presente igual a \$ 100.386,93. Essa taxa está abaixo da taxa verdadeira; pois, quanto maior a taxa menor o valor presente, devendo-se testar taxa superior. Ao estimar 11,3% obtém-se \$ 99.796,59, concluindo-se, então, que a taxa verdadeira, aquela que zera o fluxo, encontra-se entre essas duas taxas utilizadas como experimento.

Procedendo-se ao processo de interpolação linear, tem-se:

	→ 11,0%	100.386,93 ←	
	11,3%	99.796,59	
	i%	100.000,00	

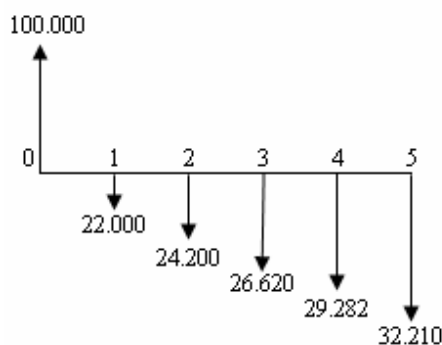
$$\frac{(i\% - 11,0\%)}{(11,3\% - 11,0\%)} = \frac{(100.000,00 - 100.386,93)}{(99.796,59 - 100.386,93)}$$

i = 11,20% ao mês

Como se observa nas equações de valor, as cinco prestações mensais, de valores decrescentes em progressão aritmética de razão igual ao produto da amortização constante pela taxa periódica, são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00 somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos de 10% ao mês; porquanto, caso fossem a juros simples, a taxa seria de 11,20%.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos, para a determinação das prestações.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



#### Capitalização composta

$$100.000,00 = \frac{22.000,00}{(1+i)^1} + \frac{24.200,00}{(1+i)^2} + \frac{26.620,00}{(1+i)^3} + \frac{29.282,00}{(1+i)^4} + \frac{32.210,20}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira, que somente calcula a taxa na capitalização composta, e utilizando a mesma rotina anterior, obtém-se uma taxa efetiva igual a 10% ao mês.

#### Capitalização simples

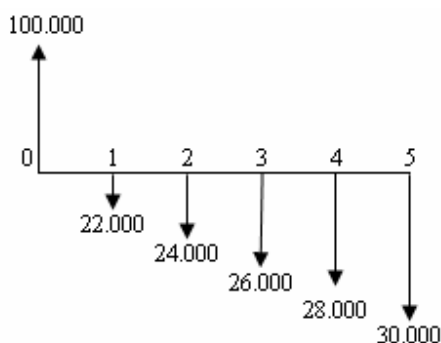
$$100.000,00 = \frac{22.000,00}{(1+i \times 1)} + \frac{24.200,00}{(1+i \times 2)} + \frac{26.620,00}{(1+i \times 3)} + \frac{29.282,00}{(1+i \times 4)} + \frac{32.210,20}{(1+i \times 5)}$$

Determinando-se a taxa do referido fluxo de caixa, por interpolação linear ou pela função do Excel - atingir metas, obtém-se uma taxa de juros simples igual a 11,36% ao mês.

Como se observa nas equações de valor, as cinco prestações mensais, de valores crescentes em progressão geométrica de razão igual ao quociente da prestação pela prestação anterior, são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00 somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos de 10% ao mês; porquanto, caso fossem a juros simples, a taxa seria de 11,36%.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples, para a determinação das prestações.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo pode ser assim representado:



#### Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{22.000}{(1+i \times 1)} + \frac{24.000}{(1+i \times 2)} + \frac{26.000}{(1+i \times 3)} + \frac{28.000}{(1+i \times 4)} + \frac{30.000}{(1+i \times 5)}$$

Determinando-se a taxa do referido fluxo de caixa, por meio de interpolação linear ou pela função do Excel - atingir metas, obtém-se uma taxa de juros simples de 10,00% ao mês.

#### Capitalização composta

$$100.000,00 = \frac{22.000}{(1+i)^1} + \frac{24.000}{(1+i)^2} + \frac{26.000}{(1+i)^3} + \frac{28.000}{(1+i)^4} + \frac{30.000}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira, que somente calcula a taxa na capitalização composta, utilizando a mesma rotina anterior, obtém-se uma taxa efetiva igual a 8,92% ao mês.

Como se observa nas equações de valor, as cinco prestações mensais, de valores crescentes em progressão aritmética de razão igual ao produto da amortização constante pela taxa periódica são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00 somente se forem descapitalizadas (descontadas) a juros simples de 10% ao mês; porquanto, caso fossem a juros compostos, a taxa seria de 8,92%.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros compostos, e o seu resultado for igual à taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se a taxa de juros for maior que a taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros simples, e o seu resultado for igual à taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se a taxa de juros for menor que a taxa do empréstimo, esse empréstimo não foi efetivado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

### **(b) Há juros embutidos nos saldos devedores**

#### **Confirmação 1**

A princípio, não há necessidade em desmembrar, no valor do pagamento, a parcela relativa aos juros e à amortização. Sendo assim, para compreender a estrutura e o desenvolvimento do Sistema SAC, adote-se o mesmo exemplo utilizado no Sistema Price: empréstimo no valor de \$ 100.000,00, a ser liquidado em 5 prestações mensais, sem entrada, à taxa contratada de 120% ao ano, capitalização mensal (efetiva de 10% ao mês, para fins didáticos e evidenciar as diferenças entre os regimes), para elaborar a planilha de amortização no Quadro 25, considerando o valor das prestações e determinando o saldo devedor antes e depois do pagamento de cada prestação.

Mês	SD antes PGTO	PGTO	SD após PGTO
0			100.000,00
1	110.000,00	30.000	80.000
2	88.000	28.000	60.000
3	66.000	26.000	40.000
4	44.000	24.000	20.000
5	22.000	22.000	zero

Quadro 25: Sistema SAC – Pagamentos e saldos devedores

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 25, a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos; porquanto, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, um valor não contém juro somente quando se encontra na data zero. Se a taxa incidir sobre saldos remanescentes, como é o caso dos saldos devedores nas datas um, dois, três e quatro, a capitalização é composta; pois, esses saldos remanescentes, embora de valores nominais decrescentes, situam-se em datas posteriores à data zero e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, contêm juros. Em razão da evidência conceitual, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, há autores que consideram que o pagamento, por ter valor superior ao do juro do período calculado sobre o saldo devedor anterior, liquida esse juro e com a sobra ainda amortiza o saldo devedor, não restando, dessa forma, juros devidos no saldo devedor. Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido, exemplo típico de capitalização simples.

Inobstante, é oportuno enfatizar que o valor do juro é totalmente pago somente quando há liquidação total do empréstimo (capital inicial emprestado + juros devidos totais = saldo devedor), no final de um único período de capitalização, caracterizando uma única operação. Caso contrário, sempre haverá juro devido (vencido) e não pago embutido no saldo devedor, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO DE DINHEIRO.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo prático adotado, observe-se o desenvolvimento da planilha de amortização do Sistema SAC, constante do Quadro 25. Ao final do 1º período são exigidos juros à taxa  $i$ , acrescidos ao valor do empréstimo  $VE = SD_0$  (saldo devedor na data zero), para obtenção do saldo devedor antes do pagamento da prestação periódica  $e$ , deduzindo-se o valor do pagamento, obtém-se o valor do saldo devedor após o pagamento dessa prestação ( $SD_1$ ), como comprovado em [XXVII], demonstrando que o saldo devedor independe do valor da amortização e dos juros.

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1 + i) - PGTO_2$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$SD_2 = [SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1] \times (1 + i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO_1 \times (1 + i) - PGTO_2 \Rightarrow \text{caracterização de juro composto}$$

Utilizando-se os dados do exemplo prático, tem-se:

$$SD_2 = 100.000,00 \times (1,10)^2 - 30.000 \times (1+0,10) - 28.000$$

$$SD_2 = \mathbf{60.000,00.....}$$

Como se percebe, pelo surgimento do fator de capitalização composta  $1,10^2$  na determinação do  $SD_2$ , fica comprovada a existência de juros devidos e não pagos nesse saldo devedor, e a capitalização composta está caracterizada, evidenciando a incidência da taxa de juros sobre juros. Enfatize-se que os juros devidos e não pagos, por se situarem em datas anteriores à data do saldo devedor, são juros vencidos. Portanto, como a taxa de juros incide sempre sobre juros anteriores à data base de cálculo, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos ratifica essa característica da capitalização composta.

## Confirmação 2

Depois de determinado o valor da amortização constante e das parcelas nos sistemas (1) SAC, (2) Equivalência em Juros compostos e (3) Equivalência em Juro Simples, as planilhas de amortização do empréstimo tomado como exemplo pode ser construída, decompondo as prestações em parcelas de juros e amortização, conforme características de cada sistema.

(1) No Sistema SAC, a amortização é constante, o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior e somando-o ao valor da amortização obtém-se a prestação, conforme demonstrado no Quadro 24.

Para a comprovação da existência de juros devidos (vencidos) e não pagos nos saldos devedores, bases da incidência da taxa efetiva periódica de juros, caracterizando a capitalização composta, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVIII] para determinação do saldo devedor de todos os períodos, a partir do primeiro:



$$SD_1 = 100.000 \times (1,10)^1 - 30.000,00$$

$$SD_1 = 80.000,00$$

$$SD_2 = 100.000 \times (1,10)^2 - 30.000,00 \times (1,10)^1 - 28.000,00$$

$$SD_2 = 60.000,00$$

$$SD_3 = 100.000 \times (1,10)^3 - 30.000,00 \times (1,10)^2 - 28.000,00 \times (1,10)^1 - 26.000,00$$

$$SD_3 = 40.000,00$$

$$SD_4 = 100.000 \times (1,10)^4 - 30.000,00 \times (1,10)^3 - \dots - 26.000,00 \times (1,10)^1 - 24.000,00$$

$$SD_4 = 20.000,00$$

$$SD_5 = 100.000 \times (1,10)^5 - 30.000,00 \times (1,10)^4 - \dots - 24.000,00 \times (1,10)^1 - 22.000,00$$

$$SD_5 = \text{zero}$$

Como se observa, pelo surgimento dos fatores de capitalização composta  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ ,  $(1,10)^4$  e  $(1,10)^5$  na determinação dos saldos devedores, a existência de juros devidos (vencidos) e não pagos nesses saldos devedores fica comprovada e, pela incidência da taxa de juros sobre juros, a capitalização composta está caracterizada no sistema SAC,

(2) No Sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, o juro do período é o resultado da aplicação da fórmula de juros compostos [VII] sobre o valor presente de cada empréstimo ou pela diferença entre o montante de cada empréstimo (valor da prestação) e o valor presente de cada empréstimo (amortização).

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos.

Ao manter as prestações originais do SAC e utilizar o fluxo de caixa descontado, o valor da amortização, como é o valor de cada empréstimo, deixa de ser constante. A amortização é obtida pela descapitalização de cada prestação (montante) para a data zero ou pela diferença entre a prestação e respectivo juro:

$$J_1 = 27.272,73 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.727,27$$

$$A_1 = 30.000,00 - 2.727,27 \rightarrow A_1 = 27.272,73$$

$$J_2 = 23.140,50 \times [(1+0,10)^2 - 1] \rightarrow J_2 = 4.859,50$$

$$A_2 = 28.000,00 - 4.859,50 \rightarrow A_2 = 23.140,50$$

$$J_3 = 19.534,18 \times [(1+0,10)^3 - 1] \rightarrow J_3 = 6.465,82$$

$$A_3 = 26.000,00 - 6.465,82 \rightarrow A_3 = 19.534,18$$

$$J_4 = 16.392,32 \times [(1+0,10)^4 - 1] \rightarrow J_4 = 7.607,68$$

$$A_4 = 24.000,00 - 7.607,68 \rightarrow A_4 = 16.392,32$$

$$J_5 = 13.660,27 \times [(1+0,10)^5 - 1] \rightarrow J_5 = 8.339,73$$

$$A_5 = 22.000,00 - 8.339,73 \rightarrow A_5 = 13.660,27$$

Considerando cinco empréstimos individuais, a amortização é o valor presente de cada empréstimo e o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma composta até o período igual ao da prestação liquidada, da mesma forma já comprovada quando da obtenção da fórmula [XXXIII]:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i)^1$$

$$SD_1 = (100.000 - 27.272,73) \times (1 + 0,10)^1$$

$$SD_1 = 80.000,00$$

$$SD_2 = (VE - A_2 - A_1) \times (1 + i)^2$$

$$SD_2 = (100.000 - 27.272,73 - 23.140,50) \times (1 + 0,10)^2$$

$$SD_2 = 60.000,00 \dots\dots$$

$$SD_5 = (VE - A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^5$$

$$SD_5 = (100.000 - 27.272,73 - 23.140,50 - \dots - 13.660,27) \times (1 + 0,10)^5$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, todos os saldos devedores, iguais aos do sistema de amortização SAC, contêm juros e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta por meio do aparecimento dos fatores de capitalização:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ ,  $(1,10)^4$  e  $(1,10)^5$ . Logo, a capitalização composta no Sistema de Amortização Constante – SAC está confirmada.

Depois de calculados os elementos componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 26:

Período	Amortização	Juro pago	Prestação	Saldo devedor
0				100.000,00
1	27.272,73	2.727,27	30.000,00	80.000,00
2	23.140,50	4.859,50	28.000,00	60.000,00
3	19.534,18	6.465,82	26.000,00	40.000,00
4	16.392,32	7.607,68	24.000,00	20.000,00
5	13.660,27	8.339,73	22.000,00	zero
<b>Σ</b>	100.000,00	30.000,00	130.000,00	300.000,00

Quadro 26: Prestações do SAC – Empréstimos distintos (composto)  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe no sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos - Quadro 26, as prestações e os saldos devedores são exatamente os mesmos da planilha do Sistema SAC – Quadro 24; portanto, como comprovado cientificamente, a capitalização composta está confirmada. Entretanto, é oportuno observar que as amortizações não são constantes e sim decrescentes e os juros são crescentes, contrariamente ao Sistema SAC. Esse fato, porém, não altera os saldos devedores e nem o fluxo de pagamentos do empréstimo, considerando-se que o cálculo do saldo devedor independe do valor dos juros e da amortização.

No sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, os juros e as amortizações são obtidos considerando o valor do dinheiro no tempo; porém, no sistema SAC e nos demais sistemas usuais, exceto o sistema de amortização com base na equivalência em juros simples, **convencionou-se que os juros são determinados por meio da incidência da taxa efetiva periódica sobre o saldo devedor do período anterior**, fazendo com que os juros sejam decrescentes e as amortizações crescentes ou constantes, à medida que decresce o saldo devedor, com a liquidação das prestações.

Esse procedimento facilita sobremaneira a compreensão e os cálculos, além de elevar o valor do benefício fiscal para o devedor, embora represente uma distorção financeira em termos conceituais; porquanto, quanto maior o prazo, maior deve ser o juro embutido na prestação, como

ocorre com o sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, que considera o valor do dinheiro no tempo.

A referida distorção financeira justifica o fato de que, havendo liquidação antecipada de alguma parcela, prefere-se liquidar a última, em razão de que os juros embutidos são os menores. Para melhor entendimento, adote-se a hipótese de que na data zero se queira antecipar o pagamento da primeira prestação: no sistema SAC, conforme planilha de amortização, deveria ser liquidada pelo valor de \$ 20.000,00, resultado do desconto dos juros de \$ 10.000,00 do valor da prestação de \$ 30.000,00.

Certamente, nenhuma instituição financeira aceitará a liquidação da primeira prestação por \$ 20.000,00, uma vez que os juros embutidos e, por conseguinte o valor da amortização, não são coerentes e nem traduzem consistência científica. Como o financiamento será liquidado em prestações, os juros de \$ 10.000,00, calculados sobre o total da dívida, corresponderiam aos juros somente se o empréstimo fosse liquidado no final de 1 mês e não aos juros relativos à primeira prestação. A primeira prestação deveria ser liquidada por \$ 27.272,73, resultado da extração dos juros de \$ 2.727,27 do valor da prestação de \$ 30.000,00, contidos na primeira prestação e correspondentes ao valor do primeiro empréstimo. Em razão de as parcelas serem variáveis, o valor dos juros não corresponde aos juros da última prestação, como ocorre no sistema Price.

Ao se liquidar antecipadamente prestações, os valores a serem pagos devem levar em consideração os juros embutidos em cada prestação, ou seja, o valor do dinheiro no tempo. Se, porventura, for antecipado em um mês o pagamento de uma prestação, deve-se determinar o valor presente da prestação um mês antes; se for antecipado em dois meses, deve-se determinar o valor presente da prestação dois meses antes, e assim por diante, como se demonstra:

Antecipando, em um mês, o pagamento da primeira prestação:

$$VP_1 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^1} \Rightarrow 27.272,73$$

$$J_1 = \text{desconto racional} = 2.727,27$$

Antecipando, em dois meses, o pagamento da segunda prestação:

$$VP_2 = \frac{28.000,00}{(1+0,10)^2} \Rightarrow 23.140,50$$

$$J_2 = \text{desconto racional} = 4.859,50$$

Antecipando, em três meses, o pagamento da terceira prestação:

$$VP_3 = \frac{26.000,00}{(1+0,10)^3} \Rightarrow 19.534,18$$

$$J_3 = \text{desconto racional} = 6.465,82$$

Destaque-se que, ao se considerar o valor do dinheiro no tempo, os saldos devedores e as amortizações, quando do pagamento das próximas prestações, ficam exatamente os mesmos, mantendo a liquidação do empréstimo no pagamento da última prestação.

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples.

Ao manter as prestações originais do SAC e utilizar o fluxo de caixa descontado, o valor da amortização, como é o valor de cada empréstimo, deixa de ser constante. A amortização é obtida pela descapitalização de cada prestação (montante) para a data zero ou pela diferença entre a prestação e respectivo juro simples:

$$J_1 = 27.272,73 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.727,27$$

$$A_1 = 30.000,00 - 2.727,27 \rightarrow A_1 = 27.272,73$$

$$J_2 = 23.333,33 \times 0,10 \times 2 \rightarrow J_2 = 4.666,67$$

$$A_2 = 28.000,00 - 4.666,67 \rightarrow A_2 = 23.333,33.....$$

$$J_5 = 14.666,67 \times 0,10 \times 5 \rightarrow J_5 = 7.333,33$$

$$A_5 = 22.000,00 - 7.333,33 \rightarrow A_5 = 14.666,67$$

Considerando cinco empréstimos individuais, no valor total de R\$ 102.415,58, a amortização é o valor presente de cada empréstimo e o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma simples até o período igual ao da prestação liquidada, da mesma forma já comprovada quando da obtenção da fórmula [XXXIII]:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i \times 1)$$

$$SD_1 = (102.415,58 - 27.272,73) \times (1 + 0,10 \times 1)$$

$$SD_1 = 82.657,14$$

$$SD_2 = (VE - A_1 - A_2) \times (1 + i \times 2)$$

$$SD_2 = (102.415,58 - 27.272,73 - 23.333,33) \times (1 + 0,10 \times 2)$$

$$SD_2 = 62.171,42$$

$$SD_3 = (VE - A_1 - A_2 - A_3) \times (1 + i \times 3)$$

$$SD_3 = (102.415,58 - 27.272,73 - 23.333,33 - 20.000,00) \times (1 + 0,10 \times 3)$$

$$SD_3 = 41.352,38$$

$$SD_4 = (VE - A_1 - A_2 - A_3 - A_4) \times (1 + i \times 4)$$

$$SD_4 = (102.415,58 - 27.272,73 - 23.333,33 - \dots - 17.142,86) \times (1 + 0,10 \times 4)$$

$$SD_4 = 20.533,33$$

$$SD_5 = (VE - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5) \times (1 + i \times 5)$$

$$SD_5 = (102.415,58 - 27.272,73 - 23.333,33 - \dots - 14.666,67) \times (1 + 0,10 \times 5)$$

$$SD_5 = 0,00$$

Constata-se que os juros de cada empréstimo foram calculados sobre o capital inicial emprestado e não somados a esse capital para exigir novos juros nos períodos seguintes. **Os saldos devedores**, embora contenham juros simples, **não se configuram como base para o cálculo dos juros do período**; pois, a incidência da taxa se dá sobre os valores de cada empréstimo e, pelo aparecimento dos fatores (1,10), (1,20), (1,30), (1,40) e (1,50), caracterizam o regime de capitalização simples. Logo, a capitalização simples está confirmada, comprovando que o Sistema SAC não se efetiva nesse regime de capitalização.

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elaborase a planilha de amortização, conforme Quadro 27:

Período	Amortização	Juro pago	Prestação	Saldo devedor
0				102.415,58
1	27.272,73	2.727,27	30.000,00	82.657,14
2	23.333,33	4.666,67	28.000,00	62.171,43
3	20.000,00	6.000,00	26.000,00	41.352,38
4	17.142,86	6.857,14	24.000,00	20.533,33
5	14.666,67	7.333,33	22.000,00	0,00
<b>Σ</b>	102.415,58	27.584,42	130.000,00	309.129,86

Quadro 27: Prestações do SAC – Empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe, ao se manterem as prestações do SAC e proceder à equivalência com base na equivalência em juros simples - Quadro 27, os juros de cada período não são calculados sobre o saldo devedor anterior, em razão desse regime não admitir o fracionamento de prazo por vencer a termo, e sim sobre o valor de cada empréstimo. O saldo devedor de cada período é obtido por meio de equivalência na data zero, única data em que um valor não contém juro, determinando-se o montante de juros simples do saldo entre os valores presentes dos empréstimos - como se fosse único - e as amortizações havidas; portanto, fica comprovada a inexistência de juros sobre juros, ratificando que o SAC não se realiza na capitalização simples.

Enfatize-se que não é conceitualmente correto fazer incidir a taxa sobre o saldo devedor anterior, para concluir que o empréstimo não foi totalmente liquidado, restando um saldo a pagar de \$ 3.890,32; porquanto, a taxa está sendo aplicada sobre base diferente daquela definida no sistema e no regime, em razão da cindibilidade de prazo; pois, se a taxa incidir sobre o saldo devedor anterior, a capitalização deixa de ser simples, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO e EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, além de o sistema SAC e sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, fazendo analogia com sistema de amortização em juros simples.

Da mesma forma, atente-se ao fato de que a equivalência na capitalização simples ocorre somente na data zero, conforme comprovação matemática [4.2.1]. Portanto, é conceitualmente incorreto proceder à equivalência na data cinco, concluindo que o valor do empréstimo não foi remunerado de forma equânime ao montante das parcelas, aplicadas tanto a juros simples como compostos, favorecendo ao credor.

As considerações sobre a aplicação de parcelas pelo credor e liquidação antecipada de parcelas pelo devedor, em juros simples, são exatamente as mesmas havidas no regime de capitalização simples do Sistema Price.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos.

Ao manter as amortizações originais do SAC, há que se fazer cinco empréstimos distintos de R\$ 20.000,00, iguais ao valor das amortizações. Os juros compostos de cada empréstimo são obtidos com a utilização da fórmula [VII] e os pagamentos (montantes) por meio da soma do capital de respectivos juros:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 20.000,00 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.000,00 \rightarrow PGTO_1 = 22.000,00 \\
 J_2 &= 20.000,00 \times [(1+0,10)^2 - 1] \rightarrow J_2 = 4.200,00 \rightarrow PGTO_1 = 24.200,00 \\
 J_3 &= 20.000,00 \times [(1+0,10)^3 - 1] \rightarrow J_3 = 6.620,00 \rightarrow PGTO_1 = 26.620,00 \\
 J_4 &= 20.000,00 \times [(1+0,10)^4 - 1] \rightarrow J_4 = 9.282,00 \rightarrow PGTO_1 = 29.282,00 \\
 J_5 &= 20.000,00 \times [(1+0,10)^5 - 1] \rightarrow J_5 = 12.210,20 \rightarrow PGTO_1 = 32.210,20
 \end{aligned}$$

Em qualquer sistema de amortização em que a taxa incida sobre o saldo devedor anterior, o saldo devedor de um período qualquer sempre será o saldo devedor do período anterior acrescido do juro do período e diminuído da prestação do período, comprovado cientificamente quando da obtenção da fórmula [XXVII]:

$$\begin{aligned}
 SD_1 &= 100.000 \times (1,10)^1 - 22.000,00 \\
 SD_1 &= 88.000,00 \\
 SD_2 &= 100.000 \times (1,10)^2 - 22.000,00 \times (1,10)^1 - 24.200,00 \\
 SD_2 &= 72.600,00 \\
 SD_3 &= 100.000 \times (1,10)^3 - 22.000,00 \times (1,10)^2 - 24.200,00 \times (1,10)^1 - 26.620,00 \\
 SD_3 &= 53.240,00 \\
 SD_4 &= 100.000 \times (1,10)^4 - 30.000,00 \times (1,10)^3 - \dots - 26.000,00 \times (1,10)^1 - 24.000,00 \\
 SD_4 &= 29.282,00 \\
 SD_5 &= 100.000 \times (1,10)^5 - 30.000,00 \times (1,10)^4 - \dots - 24.000,00 \times (1,10)^1 - 22.000,00 \\
 SD_5 &= \text{zero}
 \end{aligned}$$



Como se observa, todos os saldos devedores contêm juros devidos (vencidos) e não pagos, e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta pelo aparecimento dos fatores:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ ,  $(1,10)^4$  e  $(1,10)^5$ . Logo, a capitalização composta no Sistema de Amortização Constante – SAC está cientificamente confirmada.

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 28:

Período	Amortização	Juro pago	Prestação	Saldo devedor
0				100.000,00
1	20.000,00	2.000,00	22.000,00	88.000,00
2	20.000,00	4.200,00	24.200,00	72.600,00
3	20.000,00	6.620,00	26.620,00	53.240,00
4	20.000,00	9.282,00	29.282,00	29.282,00
5	20.000,00	12.210,20	32.210,20	zero
<b>Σ</b>	100.000,00	34.312,20	134.312,20	343.122,00

Quadro 28: Amortizações do SAC – Empréstimos distintos (composto)  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe no sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, mantendo as amortizações constantes - Quadro 28, as prestações são crescentes e iniciam com valores inferiores ao SAC, com saldos devedores amortizados mais lentamente no seu início, fazendo com que o total de juros (valor histórico) seja superior ao do SAC.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples.

Ao manter as amortizações originais do SAC, há que se fazer cinco empréstimos distintos de R\$ 20.000,00, iguais ao valor das amortizações. Os juros simples de cada empréstimo são obtidos com a utilização da fórmula [II] e os pagamentos (montantes) por meio da soma do capital de respectivos juros:

$$J_1 = 20.000,00 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.000,00 \rightarrow PGTO_1 = 22.000,00$$

$$J_2 = 20.000,00 \times 0,10 \times 2 \rightarrow J_2 = 4.000,00 \rightarrow PGTO_2 = 24.000,00$$

$$J_3 = 20.000,00 \times 0,10 \times 3 \rightarrow J_3 = 6.000,00 \rightarrow PGTO_3 = 26.000,00$$

$$J_4 = 20.000,00 \times 0,10 \times 4 \rightarrow J_4 = 8.000,00 \rightarrow PGTO_4 = 28.000,00$$

$$J_5 = 20.000,00 \times 0,10 \times 5 \rightarrow J_5 = 10.000,00 \rightarrow PGTO_5 = 30.000,00$$

O saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes, como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma simples até o período igual ao da prestação liquidada, conforme comprovação matemática, quando da obtenção da fórmula [XXXIV]:

$$SD_1 = (100.000 - 20.000,00) \times (1 + 0,10 \times 1)$$

$$SD_1 = 88.000,00$$

$$SD_2 = (100.000 - 40.000,00) \times (1 + 0,10 \times 2)$$

$$SD_2 = 72.000,00$$

$$SD_3 = (100.000 - 60.000,00) \times (1 + 0,10 \times 3)$$

$$SD_3 = 52.000,00$$

$$SD_4 = (100.000 - 80.000,00) \times (1 + 0,10 \times 4)$$

$$SD_4 = 28.000,00$$

$$SD_5 = (100.000 - 100.000,00) \times (1 + 0,10 \times 5)$$

$$SD_5 = \text{zero}$$

Como se constata nos cálculos dos saldos devedores, embora eles contenham juro devido (vencidos) e não pagos, não servem de base para o cálculo dos juros do período; pois, a taxa de juros incide sempre sobre o resultado do valor total dos empréstimos menos as amortizações havidas, na data zero, descaracterizando a incidência de juros sobre juros. Além disso, o surgimento dos fatores de capitalização simples (1,10); (1,20); (1,30); (1,40) e (1,50) comprovam a capitalização simples, ratificando que o SAC não se efetiva nesse regime de capitalização.

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 29:

Período	Amortização	Juro pago	Prestação	Saldo devedor
0				100.000,00
1	20.000,00	2.000,00	22.000,00	88.000,00
2	20.000,00	4.000,00	24.000,00	72.000,00
3	20.000,00	6.000,00	26.000,00	52.000,00
4	20.000,00	8.000,00	28.000,00	28.000,00
5	20.000,00	10.000,00	30.000,00	zero
<b>Σ</b>	100.000,00	30.000,00	130.000,00	300.000,00

Quadro 29: Amortizações do SAC – Empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe no sistema de amortização com base na equivalência em juros simples, mantendo as amortizações constantes - Quadro 29, as prestações são as mesmas do SAC; porém, de forma invertida, ou seja, crescentes em progressão aritmética, cuja razão é o produto da amortização constante pela taxa periódica, produzindo, dessa forma, o mesmo total de juros, favorecendo financeiramente ao devedor.

### Confirmação 3

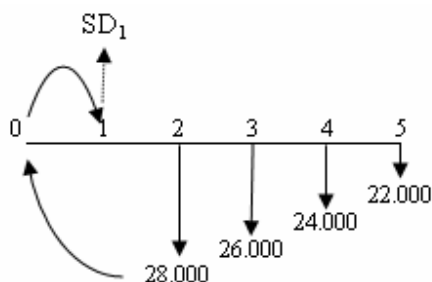
Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, determinam-se os saldos devedores após o pagamento de cada prestação, na capitalização simples e composta, respectivamente.

#### Capitalização simples

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.1, a equivalência na capitalização simples tem que ser efetivada obrigatoriamente na data focal zero, ou seja, determina-se o valor presente das parcelas vincendas, na data zero, e capitaliza-se, de forma simples, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAC.

Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação:

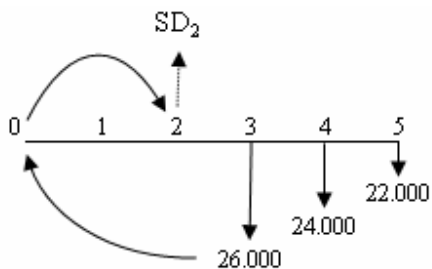


$$SD_0 = \frac{28.000}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{26.000}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{24.000}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{22.000}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 75.142,86$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + 0,10 \times 1) \rightarrow \mathbf{82.657,14}$$

Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação:

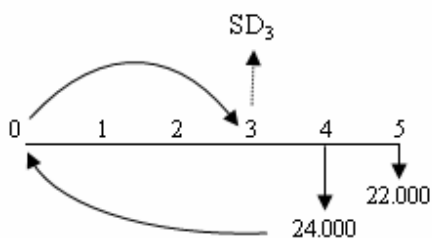


$$SD_0 = \frac{26.000}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{24.000}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{22.000}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 51.809,52$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10 \times 2) \rightarrow \mathbf{62.171,43}$$

Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação:

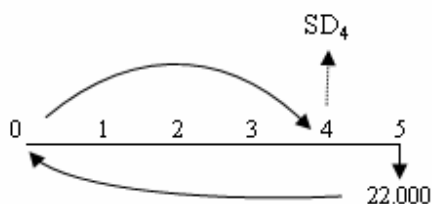


$$SD_0 = \frac{24.000}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{22.000}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 31.809,52$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10 \times 3) \rightarrow \mathbf{41.352,38}$$

Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação:



$$SD_0 = \frac{22.000}{(1 + 0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 14.666,67$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1 + 0,10 \times 4) \rightarrow \mathbf{20.533,33}$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma simples até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 30:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				102.415,58	102.415,58
1	30.000,00	2.727,27	27.272,73	75.142,86	82.657,14
2	28.000,00	4.666,67	23.333,33	51.809,52	62.171,43
3	26.000,00	6.000,00	20.000,00	31.809,52	41.352,38
4	24.000,00	6.857,14	17.142,86	14.666,67	20.533,33
5	22.000,00	7.333,33	14.666,67	zero	zero
<b>Σ</b>	130.000,00	27.584,42	102.415,58	275.844,15	309.129,86

Quadro 30: Prestações do SAC – Saldo devedor na data zero, capitalizado (simples).  
Fonte: Elaborado pelo autor

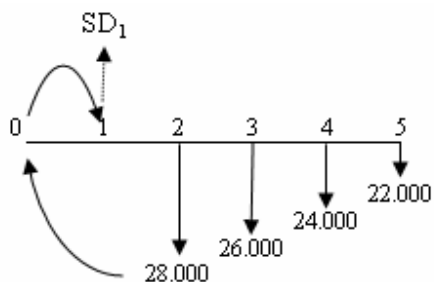
Ressalte-se que, em mantendo o valor das prestações iguais ao SAC e ao considerar a capitalização simples nos empréstimos distintos, o valor presente de um único empréstimo fica majorado para \$ 102.415,58, ratificando que o SAC não se efetiva no regime de capitalização simples.

#### Capitalização composta

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.2, a equivalência na capitalização composta pode ser efetivada em qualquer data focal. Portanto, o saldo devedor em qualquer período nada mais é do que o valor presente das parcelas vincendas, ou seja, valor presente das parcelas vincendas de uma série não-uniforme postecipada.

Entretanto, para proceder à analogia com a capitalização simples, o saldo devedor será também determinado por meio de equivalência na data zero. Para isso, determina-se o valor presente das parcelas vincendas e capitaliza-se, de forma composta, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação

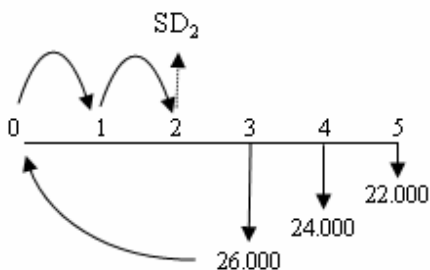


$$SD_0 = \frac{28.000}{(1+0,10)^2} + \frac{26.000}{(1+0,10)^3} + \frac{24.000}{(1+0,10)^4} + \frac{22.000}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 72.727,27$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \rightarrow \mathbf{80.000,00}$$

Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação

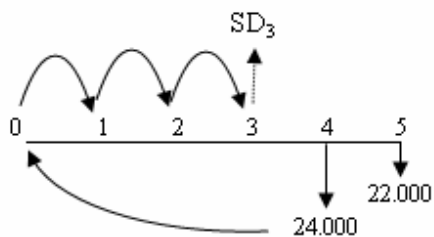


$$SD_0 = \frac{26.000}{(1+0,10)^3} + \frac{24.000}{(1+0,10)^4} + \frac{22.000}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 49.586,78$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^2 \rightarrow \mathbf{60.000,00}$$

Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação



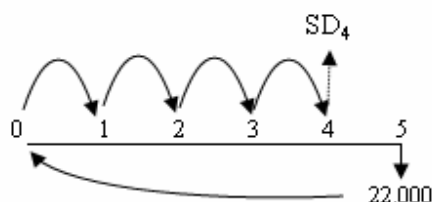
$$SD_0 = \frac{24.000}{(1+0,10)^4} + \frac{22.000}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 30.052,59$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10)^3 \rightarrow \mathbf{40.000,00}$$

Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação:



$$SD_0 = \frac{22.000}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 16.660,27$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1+0,10)^4 \rightarrow \mathbf{20.000,00}$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma composta até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 31:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	30.000,00	2.727,27	27.272,73	72.727,27	80.000,00
2	28.000,00	4.859,50	23.140,50	49.586,78	60.000,00
3	26.000,00	6.465,82	19.534,18	30.052,59	40.000,00
4	24.000,00	7.607,68	16.392,32	16.660,27	20.000,00
5	22.000,00	8.339,73	13.660,27	zero	zero
<b>Σ</b>	130.000,00	30.000,00	100.000,00	269.026,91	300.000,00

Quadro 31: Prestações do SAC – Saldo devedor na data zero, capitalizado (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Ressalte-se que, ao manter o valor das prestações iguais ao do sistema SAC e ao considerar a capitalização composta nos empréstimos distintos, o valor presente de um único empréstimo e os saldos devedores ficam mantidos (iguais), ratificando que o SAC se efetiva no regime de juros compostos.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples.

Utiliza-se a mesma lógica de cálculos dos empréstimos com as prestações do SAC, na capitalização simples, para obtenção dos saldos devedores após o pagamento de cada prestação. Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma simples até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 32:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	22.000,00	2.000,00	20.000,00	80.000,00	88.000,00
2	24.000,00	4.000,00	20.000,00	60.000,00	72.000,00
3	26.000,00	6.000,00	20.000,00	40.000,00	52.000,00
4	28.000,00	8.000,00	20.000,00	20.000,00	28.000,00
5	30.000,00	10.000,00	20.000,00	zero	0,00
<b>Σ</b>	130.000,00	30.000,00	100.000,00	300.000,00	340.000,00

Quadro 32: Amortizações do SAC – Saldo devedor na data zero, capitalizado (simples)  
Fonte: Elaborado pelo autor

Ressalte-se que, ao manter o valor das amortizações iguais ao do sistema SAC e ao considerar a capitalização simples nos empréstimos distintos, o valor das prestações e dos juros se apresentam de forma invertida ao do Sistema SAC, modificando, então, os saldos devedores, ratificando que o SAC não se efetiva no regime de juros simples.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos.

Utiliza-se a mesma lógica de cálculos dos empréstimos com as prestações do SAC, na capitalização simples, para obtenção dos saldos devedores após o pagamento de cada prestação. Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero,



capitalizando de forma composta até a data do período de um saldo devedor pretendido, elaborase a planilha de amortização, conforme Quadro 33:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>n</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	22.000,00	2.000,00	20.000,00	80.000,00	88.000,00
2	24.200,00	4.200,00	20.000,00	60.000,00	72.600,00
3	26.620,00	6.620,00	20.000,00	40.000,00	53.240,00
4	29.282,00	9.282,00	20.000,00	20.000,00	29.282,00
5	32.210,20	12.210,20	20.000,00	zero	0,00
Σ	134.312,20	34.312,20	100.000,00	300.000,00	343.122,00

Quadro 33: Amortizações do SAC – Saldo devedor na data zero, capitalizado (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Ressalte-se que, em mantendo o valor das amortizações iguais ao do sistema SAC e ao considerar a capitalização composta nos empréstimos distintos, faz com que as prestações cresçam em progressão geométrica, alterando os saldos devedores e, conseqüentemente, os juros de cada período.

Conclui-se, então, que, ao utilizar o fluxo de caixa descontado para se determinar os saldos devedores após o pagamento de cada prestação, na capitalização simples, os saldos devedores embora contenham juros devidos (vencidos) e não pagos, não servem de base para o cálculo dos juros periódicos; porquanto, a taxa de juros incide sempre sobre o valor de cada empréstimo, na data zero, única data em que um valor não contém juro, capitalizando esse valor de forma simples, a termo, descaracterizando a incidência de juros sobre juros. Além disso, o surgimento dos fatores de capitalização simples (1,10); (1,20); (1,30) e (1,40) para a determinação dos saldos devedores comprova que o SAC não se realiza na capitalização simples.

Ademais, a determinação dos juros de cada período, nesse sistema, se dá por meio da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior, que contém juro devido e não pago, caracterizando a capitalização composta, ratificada pelo sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, o qual, pagando-se as mesmas prestações, produz exatamente os mesmos saldos devedores.

Quando se utiliza o valor do dinheiro no tempo para se determinar os saldos devedores após o pagamento de cada prestação, na capitalização composta, se constata que a taxa de juros incide também sobre o valor de cada empréstimo, na data zero, porém capitalizando mensalmente, de forma composta, caracterizando a incidência de juros sobre juros. Portanto, a capitalização composta está confirmada no sistema SAC.

Destaque-se que ao se determinar o saldo devedor por meio do valor presente das parcelas vincendas, os juros constantes dessas parcelas são desembutidos, nada havendo de juro futuro no saldo devedor determinado. No entanto, constata-se que todos os saldos devedores contêm juros anteriores à data do saldo devedor determinado; portanto, juros vencidos e não pagos, e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores, caracteriza o regime de juros compostos, evidenciada pelo aparecimento dos fatores de capitalização composta:  $(1,10)^2$ ;  $(1,10)^3$  e  $(1,10)^4$ . Como a taxa de juros incide sempre sobre juros anteriores à data base de cálculo, confirma-se que a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos é característica da capitalização composta, ratificando que o SAC se efetiva nesse regime de capitalização.

#### **Confirmação 4**

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, por meio da elaboração de planilhas nos sistemas de amortização com base na equivalência em juros simples e em juros compostos, ora mantendo os valores das prestações, ora os valores das amortizações do SAC, determinando os respectivos juros e demais componentes dos sistemas, período a período, para caracterizar os dois regimes de capitalização e comparar com o sistema SAC.

- Empréstimos distintos, com prestações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples.

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, utilizando o valor do dinheiro no tempo ao descapitalizar, de forma simples, o valor das parcelas idênticas ao sistema SAC, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com esse sistema de amortização.

A referida planilha está apresentada no Quadro 34. Resgate-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim no valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizando de forma simples até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS SIMPLES PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVENDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								102.415,58	
1	27.272,73	2.727,27				2.727,27	30.000,00	82.657,14	
2	23.333,33	2.333,33	2.333,33			4.666,67	28.000,00	62.171,43	
3	20.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00		6.000,00	26.000,00	41.352,38	
4	17.142,86	1.714,29	1.714,29	1.714,29	1.714,29	6.857,14	24.000,00	20.533,33	
5	14.666,67	1.466,67	1.466,67	1.466,67	1.466,67	1.466,67	7.333,33	0,00	
Σ	102.415,58	10.241,56	7.514,29	5.180,95	3.180,95	1.466,67	27.584,42	130.000,00	309.129,86

Quadro 34: Prestações SAC – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 34, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais às do SAC é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 102.415,58, confirmando que o SAC não se realiza no regime de capitalização simples. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro simples do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São constantes em cada período, em razão da incidência da taxa de juros incidir sempre sobre a mesma base, igual ao valor de cada empréstimo, caracterizando o regime simples de capitalização, como se constata:

#### 1º Empréstimo

$$C_1 = 27.272,73$$

$$J_1 = 27.272,73 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.727,27$$

#### 2º Empréstimo

$$C_1 = 23.333,33$$

$$J_1 = 23.333,33 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.333,33$$

$$C_2 = 23.333,33$$

$$J_2 = 23.333,33 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = \frac{2.333,33}{4.666,67}$$

#### 3º Empréstimo

$$C_1 = 20.000,00$$

$$J_1 = 20.000,00 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 2.000,00$$

$$C_2 = 20.000,00$$

$$J_2 = 20.000,00 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = 2.000,00$$

$$C_3 = 20.000,00$$

$$J_3 = 20.000,00 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_3 = \frac{2.000,00}{6.000,00}$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o **total de juros devidos** de \$ 10.241,56, correspondentes ao somatório de todos os juros simples relativos ao primeiro mês de cada empréstimo. Portanto, a única hipótese de \$ 10.241,56 serem os juros do primeiro mês é se os cinco empréstimos fossem liquidados por \$ 110.241,56, no final de um mês.

Entretanto, evidencie-se que ao se pagar a primeira prestação de \$ 30.000,00 está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 27.272,73, com respectivos juros simples de \$ 2.727,27; ao pagar-se a segunda prestação de \$ \$ 28.000,00, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 23.333,33, com respectivos juros simples de \$ 4.666,67, sendo \$ 2.333,33 do 1º mês e \$ 2.333,33 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros simples pelo prazo de um mês decorrido:

Empréstimos remanescentes:  $23.333,33 + 20.000,00 + 17.142,86 + 14.666,67 = 75.142,86$

Respectivos juros, vencidos:  $2.333,33 + 2.000,00 + 1.714,29 + 1.466,67 = 7.514,29$ .

Saldo devedor:  $75.142,86 + 7.514,29 = \mathbf{82.657,14}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, mais os respectivos juros simples pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $20.000,00 + 17.142,86 + 14.666,67 = 51.809,53$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $2.000,00 + 1.714,29 + 1.466,67 = 5.180,96$ .

2º mês:  $2.000,00 + 1.714,29 + 1.466,67 = 5.180,96$

Saldo devedor:  $51.809,53 + 5.180,96 + 5.180,96 = \mathbf{62.171,45}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $17.142,86 + 14.666,67 = 31.809,53$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.714,29 + 1.466,67 = 3.180,96$ .

2º mês:  $1.714,29 + 1.466,67 = 3.180,96$ .

3º mês:  $1.714,29 + 1.466,67 = 3.180,96$ .

Saldo devedor:  $31.809,53 + 3.180,96 + 3.180,96 + 3.180,96 = \mathbf{41.352,41}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes: 14.666,67

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 1.466,67.

2º mês: 1.466,67.

3º mês: 1.466,67.

4º mês: 1.466,67.

Saldo devedor:  $14.666,67 + 1.466,67 + 1.466,67 + 1.466,67 + 1.466,67 = \mathbf{20.533,35}$

Ao decompor os saldos devedores após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros, superiores aos do SAC. Entretanto, como ficou caracterizado, a taxa não incide sobre esses saldos devedores, como no sistema SAC, e sim sobre o valor de cada empréstimo, produzindo juros menores, demonstrando matematicamente que o sistema SAC não capitaliza de forma simples.

- Empréstimos distintos, com prestações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos.

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, utilizando o valor do dinheiro no tempo ao descapitalizar, de forma composta, o valor das parcelas idênticas ao sistema SAC, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema SAC.

A referida planilha é apresentada no Quadro 35, resgatando que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros, e os valores pagos, ou o valor presente das prestações postecipadas vincendas, ou, ainda, o valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizado de forma composta até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA	
0								100.000,00
1	27.272,73	2.727,27				2.727,27	30.000,00	80.000,00
2	23.140,50	2.314,05	2.545,45			4.859,50	28.000,00	60.000,00
3	19.534,18	1.953,42	2.148,76	2.363,64		6.465,82	26.000,00	40.000,00
4	16.392,32	1.639,23	1.803,16	1.983,47	2.181,82	7.607,68	24.000,00	20.000,00
5	13.660,27	1.366,03	1.502,63	1.652,89	1.818,18	2.000,00	8.339,73	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	8.000,00	6.000,00	4.000,00	2.000,00	30.000,00	130.000,00
								300.000,00

Quadro 35: Prestações SAC – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 35, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais às do SAC é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, produzindo total de juros idêntico ao do SAC, confirmando que o sistema SAC se realiza por meio da capitalização composta. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro composto do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São crescentes geometricamente, em razão da incidência da taxa de juros sobre juros formados nos períodos anteriores, caracterizando o regime composto de capitalização, como se constata:

#### 1º Empréstimo

$$C_1 = 27.272,73$$

$$J_1 = 27.272,73 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.727,27$$

2º Empréstimo

$$C_1 = 23.140,50$$

$$J_1 = 23.140,50 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 2.314,05$$

$$C_2 = 23.140,50 + 2.140,50 = 25.454,55$$

$$J_2 = 25.454,55 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = \frac{2.545,46}{4.859,51}$$

3º Empréstimo

$$C_1 = 19.534,18$$

$$J_1 = 19.534,18 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 1.953,42$$

$$C_2 = 19.534,18 + 1.953,42 = 21.487,59$$

$$J_2 = 21.487,59 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = 2.148,75$$

$$C_3 = 21.487,59 + 2.148,75 = 23.636,36$$

$$J_3 = 23.636,36 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_3 = \frac{2.363,64}{6.465,81} \dots$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o total de juros de \$ 10.000,00, correspondentes ao somatório de todos os juros compostos relativos ao primeiro mês de cada empréstimo. Portanto, a única hipótese de \$ 10.000,00 serem os juros do primeiro mês é se os cinco empréstimos fossem liquidados por \$ 110.000,00, no final de um mês.

Entretanto, evidencie-se que, ao se pagar a primeira prestação de \$ 30.000,00, está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 27.272,73, com respectivos juros de \$ 2.727,27; ao se pagar a segunda prestação de \$ 28.000,00, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 23.140,50, com respectivos juros de \$ 4.859,50, sendo \$ 2.314,05 do 1º mês e \$ 2.545,45 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de um mês decorrido:

Empréstimos remanescentes:  $23.140,50 + 19.534,18 + 16.392,32 + 13.660,27 = 72.727,27$

Respectivos juros, vencidos:  $2.314,05 + 1.953,42 + 1.639,23 + 1.366,03 = 7.272,73$ .

Saldo devedor:  $72.727,27 + 7.272,73 = \mathbf{80.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $19.534,18 + 16.392,32 + 13.660,27 = 49.586,77$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.953,42 + 1.639,23 + 1.366,03 = 4.958,68$ .

2º mês:  $2.148,76 + 1.803,16 + 1.502,63 = 5.454,55$

Saldo devedor:  $49.586,77 + 4.958,68 + 5.454,55 = \mathbf{60.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $16.392,32 + 13.660,27 = 30.052,59$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.639,23 + 1.366,03 = 3.005,26$ .

2º mês:  $1.803,16 + 1.502,63 = 3.303,79$

3º mês:  $1.983,47 + 1.652,89 = 3.636,36$

Saldo devedor:  $30.052,59 + 3.005,26 + 3.303,79 + 3.636,36 = \mathbf{40.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $16.379,75$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.366,03$ .....

4º mês:  $1.818,18$

Saldo devedor:  $13.660,27 + 1.366,03 + 1.502,63 + 1.652,89 + 1.818,18 = \mathbf{20.000,00}$



Ao decompor os saldos devedores após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros, e como no Sistema SAC a taxa de juros incide sobre esses saldos, matematicamente fica demonstrado que a capitalização composta está caracterizada no Sistema SAC.

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples.

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, utilizando o valor do dinheiro no tempo ao capitalizar, de forma simples, o valor das amortizações idênticas ao sistema SAC, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema de amortização SAC.

A referida planilha está apresentada no Quadro 36. Reitere-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim no valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizado de forma simples até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRESTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS SIMPLES PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1	20.000,00	2.000,00					2.000,00	22.000,00	88.000,00
2	20.000,00	2.000,00	2.000,00				4.000,00	24.000,00	72.000,00
3	20.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00			6.000,00	26.000,00	52.000,00
4	20.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00		8.000,00	28.000,00	28.000,00
5	20.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	10.000,00	30.000,00	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	8.000,00	6.000,00	4.000,00	2.000,00	30.000,00	130.000,00	340.000,00

Quadro 36: Amortizações do SAC – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 36, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais às do SAC, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00 produzindo total de juros desembolsados idêntico ao do SAC. Todavia, ao manter o valor das amortizações constantes (empréstimos), os valores das prestações ficam alterados e, conseqüentemente, os demais dados da planilha.

Sendo assim, ao manter o valor das amortizações constantes e utilizando o valor do dinheiro no tempo, a juros simples, **está se criando um novo sistema de amortização constante, em que as prestações e os juros ocorrem de forma invertida ao do SAC.** Logo, as prestações iniciam com valor bastante inferior, crescendo, porém, em progressão aritmética. **Esse fato, entretanto, não altera o total de juros desembolsados (valor histórico), mas acarreta em custo de capital inferior ao do Sistema SAC.**

- Empréstimos distintos, com amortizações originais do SAC, considerando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos.

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, utilizando o valor do dinheiro no tempo ao capitalizar, de forma composta, o valor das amortizações idênticas ao sistema SAC, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema SAC.

A referida planilha está apresentada no Quadro 37. Resgate-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros, e os valores pagos, ou o valor presente das prestações postecipadas vincendas, ou, ainda, o valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizado de forma composta até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA	
0								100.000,00
1	20.000,00	2.000,00				2.000,00	22.000,00	88.000,00
2	20.000,00	2.000,00	2.200,00			4.200,00	24.200,00	72.600,00
3	20.000,00	2.000,00	2.200,00	2.420,00		6.620,00	26.620,00	53.240,00
4	20.000,00	2.000,00	2.200,00	2.420,00	2.662,00	9.282,00	29.282,00	29.282,00
5	20.000,00	2.000,00	2.200,00	2.420,00	2.662,00	2.928,20	32.210,20	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	8.800,00	7.260,00	5.324,00	2.928,20	134.312,20	343.122,00

Quadro 37: Amortizações do SAC – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)  
Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 37, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais às do SAC, é igual ao valor de um único empréstimo de \$

100.000,00, produzindo, porém, um total de juros desembolsados superior ao do SAC. Todavia, ao manter o valor das amortizações constantes, os valores das prestações ficam alterados e, conseqüentemente, os demais dados da planilha.

Sendo assim, ao manter o valor das amortizações constantes e utilizando o valor do dinheiro no tempo, a juros compostos, **está se criando um novo sistema de amortização constante, em que as prestações iniciam com valor bastante inferior ao do SAC;** porém, crescendo em progressão geométrica, ocasionando um aumento no total de juros desembolsados, embora **o custo de capital seja exatamente o mesmo do Sistema SAC.**

Finalizando a análise dos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira, destaque-se, ainda, o fato de que as instituições financeiras, ao financiar projetos de desenvolvimento e habitacionais, com liberações parciais de recursos conforme cronograma físico-financeiro, e permitir carência para o início da amortização do financiamento, capitalizam de forma composta o valor dessas liberações, ratificando que esses sistemas se realizam no regime composto de capitalização, porquanto não há possibilidade de regime híbrido.

Essa dissertação prossegue no próximo capítulo, reapresentando as análises para os outros sistemas de amortização, embora importantes, de menor utilização na realidade brasileira.

## 6. ANÁLISE DE OUTROS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

A análise dos sistemas de amortização não estaria completa se não contemplasse os outros sistemas de amortização de empréstimos utilizados na realidade brasileira. Ainda que com utilização em menor intensidade, os sistemas SAM, SACRE, SAA e Método de Gauss têm se mostrado úteis nos empréstimos de longo prazo.

### 6.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO – SAM

A denominação SAM origina-se de sua principal característica, que é constituir-se num misto entre o Price e o SAC, em que todos os componentes da planilha resultam da média aritmética desses dois sistemas, sendo, por conseguinte, todos esses componentes variáveis. Por consequência, os resultados das análises efetuadas nesses dois sistemas, em que ficou comprovado cientificamente que se processam sob o regime composto de capitalização, se aplicam totalmente ao Sistema SAM.

Com o intuito apenas de ratificar essa afirmativa e comparar com os demais sistemas, admita-se o mesmo exemplo desenvolvido na Tabela Price e SAC: um empréstimo de \$ 100.000,00 (VP), a ser liquidado em cinco (t) prestações mensais, sem entrada, a uma taxa efetiva de juros de 10% ao mês (i) e determine-se o valor das prestações periódicas (PGTO), para elaboração planilha de amortização.

$$PGTO_{SAM} = (PGTO_{PRICE} + PGTO_{SAC}) \div 2$$

$$PGTO_1 = (26.379,75 + 30.000,00) \div 2 \rightarrow 28.189,87$$

$$PGTO_2 = (26.379,75 + 28.000,00) \div 2 \rightarrow 27.189,87$$

$$PGTO_3 = (26.379,75 + 26.000,00) \div 2 \rightarrow 26.189,87$$

$$PGTO_4 = (26.379,75 + 24.000,00) \div 2 \rightarrow 25.189,87$$

$$PGTO_5 = (26.379,75 + 22.000,00) \div 2 \rightarrow 24.189,87$$

Percebe-se que o valor das prestações decresce a uma constante igual ao valor constante de decréscimo do SAC dividido por dois, em razão de a prestação do Price ser também constante e a do SAC decrescer a uma constante.

Depois de determinado o valor das prestações, elabora-se a planilha de amortização. Reitere-se: o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior e a amortização a diferença desses juros com a prestação, sendo o saldo devedor a diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros, e os valores pagos, ou o resultado do valor presente das prestações vincendas, ou, ainda, o saldo devedor anterior menos a amortização do período, conforme discriminado no Quadro 38:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	28.189,87	10.000,00	18.189,874	81.810,13
2	27.189,87	8.181,01	19.008,861	62.801,26
3	26.189,87	6.280,13	19.909,748	42.891,52
4	25.189,87	4.289,15	20.900,722	21.990,79
5	24.189,87	2.199,08	21.990,795	0,00
<b>Σ</b>	<b>130.949,37</b>	<b>30.949,37</b>	<b>100.000,00</b>	<b>309.493,70</b>

Quadro 38: Sistema SAM – Planilha tradicional

Fonte: Elaborado pelo autor

Para comparar com o Sistema SAM, aplicando o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos individuais, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 28.189,87; \$ 27.189,87; \$ 26.189,87; \$ 25.189,87 e R\$ 24.189,87, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente). A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo, como se constata algebricamente:

$$VP_1 = \frac{28.189,87}{(1+0,10)^1} \rightarrow 25.627,15$$

$$VP_2 = \frac{27.189,87}{(1+0,10)^2} \rightarrow 22.470,97$$

$$VP_3 = \frac{26.189,87}{(1+0,10)^3} \rightarrow 19.676,84$$

$$VP_4 = \frac{25.189,87}{(1+0,10)^4} \rightarrow 17.205,02$$

$$VP_5 = \frac{24.189,87}{(1+0,10)^5} \rightarrow 15.020,01$$

Como restou comprovado cientificamente, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 25.627,16; \$ 22.470,97; \$ 19.676,84; \$ 17.205,02 e \$ 15.020,01, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco pagamentos postecipados mensais de valores iguais a \$ 28.189,87; \$ 27.189,87; \$ 26.189,87; \$ 25.189,87 e R\$ 24.189,87, no regime de juros compostos, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

Para evidenciar que os juros devidos (vencidos) e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, calculando os respectivos juros e demais componentes do sistema, período a período, para caracterizar o regime de capitalização e comparar com o Sistema SAM, como se verifica na planilha de amortização.

A referida planilha é apresentada no Quadro 39. Restaure-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros, e os valores pagos, ou o valor presente das prestações postecipadas vincendas, ou, ainda, o valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizado de forma composta até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1°	25.627,16	2.562,72					2.562,72	28.189,87	81.810,13
2°	22.470,97	2.247,10	2.471,81				4.718,90	27.189,87	62.801,26
3°	19.676,84	1.967,68	2.164,45	2.380,90			6.513,03	26.189,87	42.891,52
4°	17.205,02	1.720,50	1.892,55	2.081,81	2.289,99		7.984,85	25.189,87	21.990,79
5°	15.020,01	1.502,00	1.652,20	1.817,42	1.999,16	2.199,08	9.169,87	24.189,87	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	8.181,01	6.280,13	4.289,15	2.199,08	30.949,37	130.949,37	309.493,70

Quadro 39: Sistema SAM – Decomposição do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 39, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais, determinadas conforme o SAM, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, da mesma forma como o total de juros também são iguais, caracterizando que o Sistema SAM se processa no regime de juros compostos. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro composto do período,

demonstrado no referido quadro, periodicamente. São crescentes, geometricamente, em razão da incidência da taxa de juros sobre juros formados nos períodos anteriores, caracterizando o regime composto de capitalização.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de um mês decorrido:

Empréstimos remanescentes:  $22.470,97 + 19.676,84 + 17.205,02 + 15.020,01 = 74.372,84$

Respectivos juros, vencidos 1º mês:  $2.247,10 + 1.967,68 + 1.720,50 + 1.502,00 = 7.437,28$

Saldo devedor:  $74.372,84 + 7.437,28 = \mathbf{81.810,12}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $19.676,84 + 17.205,02 + 15.020,01 = 51.901,87$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.967,68 + 1.720,50 + 1.502,00 = 5.190,18$

2º mês:  $2.164,45 + 1.892,55 + 1.652,20 = 5.709,20$

Saldo devedor:  $51.901,87 + 5.190,18 + 5.709,20 = \mathbf{62.801,25}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $17.205,02 + 15.020,01 = 32.225,03$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $1.720,50 + 1.502,00 = 3.222,50$

2º mês:  $1.892,55 + 1.652,20 = 3.544,75$

$$3^{\circ} \text{ mês: } 2.081,81 + 1.817,42 = 3.899,23$$

$$\text{Saldo devedor: } 32.225,03 + 3.222,50 + 3.544,75 + 3.899,23 = \mathbf{42.891,51}$$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes: 15.020,01

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 1.502,00

2º mês: 1.652,20

3º mês: 1.817,42

4º mês: 1.999,16

$$\text{Saldo devedor: } 15.020,01 + 1.502,00 + 1.652,20 + 1.817,42 + 1.999,16 = \mathbf{21.990,79}$$

Ao decompor os saldos devedores, após o pagamento de cada prestação ou empréstimo, fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros, e como a taxa de juros incide sobre os juros contidos nesses saldos, fica matematicamente comprovado que o Sistema SAM se processa no regime de juros compostos, da mesma forma que os dois sistemas que lhe dão origem: Price e SAC.

## 6.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CRESCENTE – SACRE

A denominação SACRE origina-se de sua principal característica, que é amortizar o valor do empréstimo de forma crescente, em progressão geométrica, cuja razão é o resultado do quociente entre uma amortização e a amortização anterior, exceto quando do recálculo do valor das prestações a cada doze meses e a última. O valor da prestação mensal inicial, a qual se mantém constante por 12 meses, é determinado de forma semelhante ao sistema SAC, ou seja, o valor da amortização constante mais o juro do primeiro período. Esse cálculo se repete a cada 12 meses, em que se utiliza o saldo devedor após o pagamento de todas as prestações mensais anteriores e o prazo remanescente.

Esse sistema foi desenvolvido pela Caixa Econômica Federal, a qual vem aplicando em suas operações de financiamentos habitacionais. Considerando que o SACRE calcula o valor das



prestações mensais conforme o SAC; porém, mantém o valor dessas prestações constantes a cada 12 meses, enquanto no SAC são decrescentes em progressão aritmética, **quando do pagamento da última prestação deve ser realizado um encontro de contas para o zeramento do saldo, o que descaracteriza o SACRE como sistema de amortização.**

Como se depreende, esse denominado sistema possui características do SAC, que lhe empresta as condições para o cálculo e recálculo das prestações, e do Price, que mantém essas prestações mensais constantes a cada 12 meses. Por conseguinte, os resultados das análises efetuadas nesses dois sistemas, em que ficou comprovado matematicamente que se processam sob o regime composto de capitalização, se aplicam totalmente ao SACRE.

Com o intuito apenas de ratificar essa afirmativa e comparar com os demais sistemas de amortização, admita-se o mesmo exemplo desenvolvido nos outros sistemas: um empréstimo de \$ 100.000,00 (VP), a ser liquidado em cinco (t) prestações mensais, sem entrada, a uma taxa efetiva de juros de 10% ao mês (i) e, para elaboração planilha de amortização, determina-se o valor das prestações periódicas (PGTO) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} PGTO_t &= A_t + J_t \\ A_t &= SD_{t-1} \div (n-t) \\ J_t &= SD_{t-1} \times i \\ PGTO_t &= \frac{SD_{t-1}}{(n-t)} + SD_{t-1} \times i \quad \text{[XXXIX]} \end{aligned}$$

Aplicando os dados do exemplo, tem-se o valor da prestação constante nos primeiros quatro meses e o valor da quinta prestação será igual ao saldo devedor do quarto mês, mais os respectivos juros<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} PGTO_1 &= 100.000 \div 5 + 100.000 \times 0,10 \\ PGTO_1 &= 30.000 \end{aligned}$$

Depois de determinado o valor das prestações, elabora-se a planilha de amortização. Reitere-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o saldo devedor

---

<sup>8</sup> Na prática, como característica do sistema, o valor da prestação é recalculado a cada doze meses.

anterior e a amortização a diferença desses juros com a prestação, sendo o saldo devedor a diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros, e os valores pagos, ou o resultado do valor presente das prestações vincendas, ou, ainda, o saldo devedor anterior menos amortização do período, conforme discriminado no Quadro 40:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	30.000,00	10.000,00	20.000,00	80.000,00
2	30.000,00	8.000,00	22.000,00	58.000,00
3	30.000,00	5.800,00	24.200,00	33.800,00
4	30.000,00	3.380,00	26.620,00	7.180,00
5	7.898,00	718,00	7.180,00	0,00
<b>Σ</b>	<b>127.898,00</b>	<b>27.898,00</b>	<b>100.000,00</b>	<b>278.980,00</b>

Quadro 40: Sistema SACRE – Planilha tradicional

Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se na planilha que, no último período, deve-se pagar somente \$ 7.898,00; pois, se mantida constante a prestação haveria um saldo credor para o mutuário no valor de \$ 22.102,00. O fato de se liquidar um empréstimo com sobra, se mantidas as características originais, pagando prestação maior que os demais sistemas, faz com que no SACRE se desembolse menos juros (valor histórico), embora o custo de capital seja exatamente o mesmo, exceto quando o sistema for efetivado com base na equivalência em juros simples.

Com o objetivo de poder comparar com o Sistema SACRE e aplicando o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos individuais, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 30.000,00; \$ 30.000,00; \$ 30.000,00; \$ 30.000,00 e R\$ 7.898,00, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente). A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo, como se constata:

$$VP_1 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^1} \rightarrow 27.272,73$$

$$VP_2 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^2} \rightarrow 24.793,39$$

$$VP_3 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^3} \rightarrow 22.539,44$$

$$VP_4 = \frac{30.000,00}{(1+0,10)^4} \rightarrow 20.490,40$$

$$VP_5 = \frac{7.898,00}{(1+0,10)^5} \rightarrow 4.904,04$$

Como restou comprovado matematicamente, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 27.272,73; \$ 24.793,39; \$ 22.539,44; \$ 20.490,40 e \$ 4.904,37, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em quatro pagamentos postecipados mensais, sucessivos e iguais a \$ 30.000,00 e um quinto de \$ 4.904,04, no regime de juros compostos, ratificando que a soma das partes é igual ao todo.

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, calculando os respectivos juros e demais componentes do sistema, período a período, para caracterizar o regime de capitalização e comparar com o denominado Sistema SACRE, como se verifica na planilha de amortização.

A referida planilha está apresentada no Quadro 41, resgatando que o juro composto do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos empréstimos e a prestação contém juros e amortização, sendo o saldo devedor resultado da diferença entre o saldo devedor anterior, com respectivos juros compostos, e os valores pagos, ou o resultado do valor presente das prestações postecipadas vincendas ou, ainda, o valor presente das prestações vincendas, na data zero, capitalizado até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1º	27.272,73	2.727,27				2.727,27	30.000,00	80.000,00	
2º	24.793,39	2.479,34	2.727,27			5.206,61	30.000,00	58.000,00	
3º	22.539,44	2.253,94	2.479,34	2.727,27		7.460,56	30.000,00	33.800,00	
4º	20.490,40	2.049,04	2.253,94	2.479,34	2.727,27	9.509,60	30.000,00	7.180,00	
5º	4.904,04	490,40	539,44	593,39	652,73	718,00	2.993,96	7.898,00	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	8.000,00	5.800,00	3.380,00	718,00	27.898,00	127.898,00	278.980,00

Quadro 41: Sistema SACRE – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 41, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais, determinadas conforme o SACRE, é igual ao valor de um único empréstimo

de \$ 100.000,00, da mesma forma que o total de juros, caracterizando que o denominado Sistema SACRE se processa no regime de juros compostos. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro composto do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São crescentes, geometricamente, em razão da incidência da taxa de juros incidir sobre juros formados nos períodos anteriores, caracterizando o regime composto de capitalização.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de um mês decorrido:

Empréstimos remanescentes:  $24.793,39 + 22.539,44 + 20.490,40 + 4.904,04 = 72.727,27$

Respectivos juros, vencidos:  $2.479,34 + 2.253,94 + 2.049,04 + 490,40 = 7.272,73$

Saldo devedor:  $72.727,27 + 7.272,73 = \mathbf{80.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $22.539,44 + 20.490,40 + 4.904,04 = 47.933,88$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $2.253,94 + 2.049,04 + 490,40 = 4.793,39$

2º mês:  $2.479,34 + 2.253,94 + 539,44 = 5.272,73$

Saldo devedor:  $47.933,88 + 4.793,39 + 5.272,73 = \mathbf{58.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $20.490,40 + 4.904,04 = 25.394,44$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $2.049,04 + 490,40 = 2.539,44$

2º mês:  $2.253,94 + 539,44 = 2.793,39$

3º mês:  $2.479,34 + 593,39 = 3.072,73$

Saldo devedor:  $25.394,44 + 2.539,44 + 2.793,39 + 3.072,73 = \mathbf{33.800,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes: 4.904,04

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 490,40

2º mês: 539,44 .....

4º mês: 652,73

Saldo devedor:  $4.904,04 + 490,40 + 539,44 + 593,39 + 652,73 = \mathbf{7.180,00}$

Ao decompor os saldos devedores, após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros compostos vencidos e não pagos, e como a taxa de juros incide sobre esses saldos, fica cientificamente comprovado que o Sistema SACRE se realiza no regime de juros compostos, da mesma forma que os sistemas que lhe dão origem e características: Price e SAC.

### 6.3 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO – SAA

A denominação SAA não guarda nenhuma relação com a sua principal característica que é a liquidação de empréstimos por meio de prestações constantes e periódicas, adicionando o valor do empréstimo à última prestação. Por serem iguais ao valor dos juros periódicos, os autores, de modo geral, consideram as prestações como sendo os próprios juros, com a taxa de juros incidindo sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido e não pago, caracterizando o regime de capitalização simples.

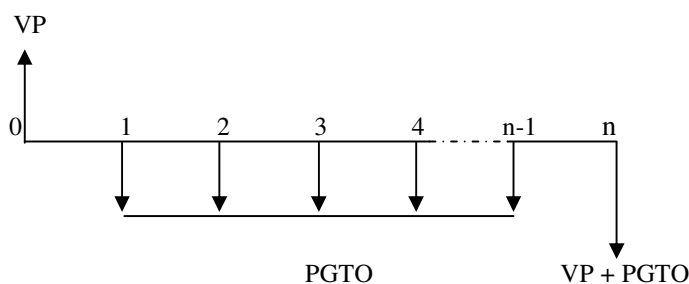
O valor da prestação, como em qualquer sistema de amortização, sempre contém parcela de capital (amortização) e encargos financeiros (juros), que são determinados pela incidência da

taxa de juros sobre o saldo devedor anterior, exceto quando a capitalização é simples. Não há, a princípio, a necessidade de se separar, no valor da prestação, a parcela relativa aos juros e à amortização. Entretanto, essa separação é de vital importância para atender às necessidades jurídico-fisco-contábeis, em razão de os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, produzirem efeito fiscal, tornando-se fundamento para decisão de investimentos.

Esse sistema foi desenvolvido para liquidação de operações por meio de pagamentos periódicos, iguais e sucessivos, resultado do somatório da parcela de capital (amortização) e encargos financeiros (juros), que são determinados pela incidência da taxa efetiva periódica sobre o saldo devedor do período anterior, além do pagamento do principal junto com o último pagamento. O valor da amortização, por conseguinte, é obtido pela diferença entre a prestação e os juros do período, e o saldo devedor pela diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período.

Para maior clareza, tome-se como exemplo um empréstimo de valor igual a **VP** (valor presente), que será liquidado em **n** prestações periódicas e iguais, com a primeira sendo paga no final do primeiro período, postecipada, a uma taxa efetiva de juros unitários de **i** por período igual ao das parcelas, e determine-se a prestação periódica (PGTO), para elaboração da planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



Observe-se que esse fluxo está de acordo com o fluxo de caixa modelo-padrão, mais um pagamento igual ao valor do empréstimo junto com a última prestação; sendo, por isso, uma série postecipada, em que o valor presente ocorre um período antes da primeira parcela e o valor futuro na mesma data da última, mais o pagamento final. Assim, o valor das parcelas (PGTO), a partir do valor presente, subtraído do valor presente do último pagamento, na data zero, é obtido por meio das relações [VI] e [X].

Depois de determinado o valor das parcelas constantes e obedecendo as características do sistema de amortização americano, a planilha de amortização pode ser elaborada, conforme Quadro 42, a seguir:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				VP = SD <sub>0</sub>
1	PGTO	J <sub>1</sub> = SD <sub>0</sub> x i	A <sub>1</sub> = PGTO - J <sub>1</sub>	SD <sub>1</sub> = SD <sub>0</sub> - A <sub>1</sub>
2	PGTO	J <sub>2</sub> = SD <sub>1</sub> x i	A <sub>2</sub> = PGTO - J <sub>2</sub>	SD <sub>2</sub> = SD <sub>1</sub> - A <sub>2</sub>
3	PGTO	J <sub>3</sub> = SD <sub>2</sub> x i	A <sub>3</sub> = PGTO - J <sub>3</sub>	SD <sub>3</sub> = SD <sub>2</sub> - A <sub>3</sub>
k	PGTO	J <sub>k</sub> = SD <sub>k-1</sub> x i	A <sub>k</sub> = PGTO - J <sub>k</sub>	SD <sub>k</sub> = SD <sub>k-1</sub> - A <sub>k</sub>
n	PGTO + VP	J <sub>n</sub> = SD <sub>n-1</sub> x i	A <sub>n</sub> = PGTO - J <sub>n</sub>	SD <sub>n</sub> = SD <sub>n-1</sub> - A <sub>n</sub>

Quadro 42: Sistema SAA – Planilha-formulário

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa na planilha de amortização do Sistema Americano, constante do Quadro 42, ao final do 1º período são exigidos juros à taxa  $i$ , que incidirá sobre o saldo devedor anterior, igual ao valor do empréstimo  $VP = SD_0$  (saldo devedor na data zero):

$$J_1 = SD_0 \times i$$

O pagamento da primeira prestação liquidará esse juro ( $J_1$ ) e amortizará a diferença ( $A_1$ ):

$$A_1 = PGTO_1 - J_1$$

Substituindo  $J_1$ , tem-se:

$$A_1 = PGTO_1 - SD_0 \times i$$

Conseqüentemente, o saldo devedor ( $SD_1$ ) ficará reduzido a:

$$SD_1 = SD_0 - A_1$$

Substituindo  $A_1$ , tem-se:

$$SD_1 = SD_0 - (PGTO_1 - SD_0 \times i)$$

$$SD_1 = SD_0 - PGTO_1 + SD_0 \times i$$

Fatorando  $SD_0$ , comum aos termos, obtém-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO_1$$

Ao final do 2º período, sobre esse  $SD_1$ , serão exigidos novos juros:

$$J_2 = SD_1 \times i$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$J_2 = [SD_0 \times (1+i) - PGTO_1] \times i$$

$$J_2 = SD_0 \times (1+i) \times i - PGTO_1 \times i$$

$$J_2 = SD_0 \times i + \mathbf{SD_0 \times i^2} - PGTO_1 \times i \longrightarrow \text{caracterização do juro composto}$$

A capitalização composta resulta caracterizada, devido ao surgimento de  $i^2$ , proveniente da incidência de **juros sobre os juros** existentes no saldo devedor anterior, devidos e não pagos. Essa relação é aplicável a qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre o saldo devedor.

Procedendo-se ao mesmo desenvolvimento efetuado no Sistema Francês de Amortização – Tabela Price [XXVII], item 4.3.1, conclui-se que o saldo devedor de um período qualquer independe do valor do juro e da amortização. Isso quer dizer que o juro e a amortização podem tomar qualquer valor, desde que a soma dos dois seja igual ao valor da prestação do período e o total das amortizações seja igual ao total do empréstimo; pois, não altera os valores dos fluxos de pagamentos e dos saldos devedores.

Logo, a incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior para se determinar os juros do período e amortização pela diferença deste com o valor da prestação são meras convenções dos idealizadores dos sistemas, para facilitar a compreensão e agilizar os cálculos; porquanto, a matemática financeira considera o valor do empréstimo e as prestações para liquidá-lo, entradas e saídas do fluxo de caixa, não importando se a título de juros ou de amortização.

Portanto, em qualquer período, o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior acrescido do juro do período e subtraído da prestação. Considerando que o valor do empréstimo (VP) é o saldo devedor inicial ( $SD_0$ ) e que o saldo devedor ( $SD_t$ ), após o pagamento da última prestação ( $PGTO_t$ ), é igual a zero, tem-se:

$$SD_1 = SD_0 \times (1+i) - PGTO_1$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1+i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = [SD_0 \times (1+i) - PGTO_1] \times (1+i) - PGTO_2$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+i)^2 - PGTO_1 \times (1+i) - PGTO_2 \longrightarrow \text{caracterização do juro composto}$$



Ao se considerar genericamente  $SD_t$  como o saldo devedor no final de um período  $t$ , qualquer, sobre esse saldo devedor, ao final do período de ordem  $t$ , obtém-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVIII], vista no item 4.3.1:

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - PGTO_1 \times (1+i)^{t-1} - PGTO_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - PGTO_t$$

Note-se que esta fórmula é idêntica à fórmula genérica do montante de juros compostos [XXV], quando se considera que as movimentações ( $M$ ) são iguais à diferença entre os pagamentos e as liberações. Como não há liberações, exceto o valor do empréstimo, as movimentações são iguais aos pagamentos:  $M = PGTO$ .

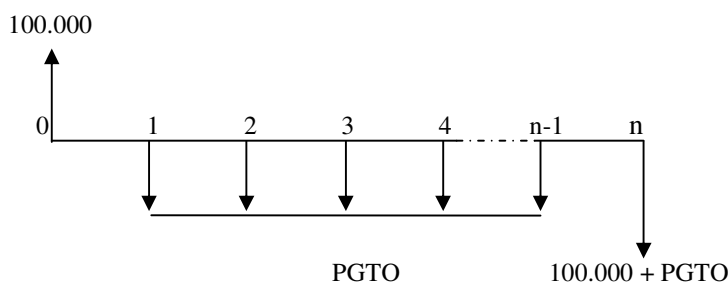
### 6.3.1 Evidências da capitalização composta

#### (a) Os regimes de capitalização são mutuamente excludentes

Só há dois regimes de capitalização: simples e composto. Se não é simples, obrigatoriamente, será composto e vice-versa.

Para melhor compreender e cotejar com a capitalização simples, admita-se o mesmo exemplo adota nos sistemas anteriores: empréstimo de \$ 100.000,00 (**VP**), a ser liquidado em cinco (**t**) prestações mensais e iguais, sem entrada, mais um pagamento igual ao valor do empréstimo (**VP**), na mesma data da última prestação, a uma taxa efetiva de juros de 10% ao mês (**i**) e determine-se a prestação periódica (**PGTO**), considerando: (1) **Sistema Americano de Amortização**; (2) **Equivalência em Juros Compostos** e (3) **Equivalência em Juros Simples**.

O fluxo de caixa desse empréstimo fica assim representado:



### **(1) Sistema Americano de Amortização**

Considerando que os saldos devedores são iguais ao valor do empréstimo e que as prestações têm valor igual ao dos juros, o valor das prestações constantes é obtido pela simples multiplicação do valor do empréstimo pela taxa periódica de juros:

$$PGTO = 100.000 \times 0,10$$

$$PGTO = \mathbf{10.000,00}$$

### **(2) Equivalência em Juros compostos**

Como já demonstrado na capitalização composta (4.2.2), a equivalência poderá ser efetivada em qualquer data focal. Para comparar com a capitalização simples, bem como coincidir com os padrões das calculadoras financeiras e da literatura, será adotada a data zero, tendo como consequência a seguinte equação de valor:

$$VP = \frac{PGTO}{(1+i)^1} + \frac{PGTO}{(1+i)^2} + \dots + \frac{PGTO + VP}{(1+i)^n}$$

Fatorando PGTO que é comum aos termos, tem-se:

$$VP = PGTO \times \left[ \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{VP}{(1+i)^n} \right]$$

Considerando que entre os colchetes identifica-se o somatório dos fatores de descapitalização a juros compostos de 1 a t, tem-se:

$$VP = PGTO \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{VP}{(1+i)^n}$$

Isolando o valor da prestação constante, obtém-se:

$$PGTO = VP \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) \right] \div \left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} \right] \quad \mathbf{[XL]}$$

Aplicando a expressão matemática obtida para o cálculo da prestação e considerando a equivalência com base no regime de juros compostos, tem-se:

$$PGTO = 100.000 \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+0,10)^5} \right) \right] \div \left[ \frac{1}{(1+0,10)^1} + \frac{1}{(1+0,10)^2} + \dots + \frac{1}{(1+0,10)^5} \right]$$

$$PGTO = 100.000 \times (0,379079) \div (3,79079)$$

$$\mathbf{PGTO = 10.000,00}$$

Com o intuito de poder comparar com a capitalização simples e aplicando o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos distintos, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a cinco pagamentos de \$ 10.000,00 e um de \$ 100.000,00 junto com o último, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente), consideração do valor do dinheiro no tempo. A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, como se constata:

$$VP_1 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^1} \rightarrow 9.090,91$$

$$VP_2 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^2} \rightarrow 8.264,46$$

$$VP_3 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^3} \rightarrow 7.513,15$$

$$VP_4 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^4} \rightarrow 6.830,13$$

$$VP_5 = \frac{110.000,00}{(1+0,10)^5} \rightarrow 68.301,35$$

Como restou comprovado, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 9.090,91; \$ 8.264,46; \$ 7.513,15; \$ 6.830,13 e \$ 68.301,35, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00; porquanto,

nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco prestações postecipadas mensais e iguais a \$ 10.000,00, mais um pagamento de \$ 100.000,00 junto com a última prestação, comprovando que a soma das partes é igual ao todo e que o SAA se realiza no regime de juros compostos.

### (3) Equivalência em Juros simples

Para melhor compreender e cotejar com o sistema com base em juros compostos e o SAA, admita-se o mesmo exemplo e determine-se a prestação periódica (PGTO), considerando o sistema com base na equivalência em **juros simples como regime de capitalização**.

Como já demonstrado na capitalização simples (4.2.1), a equivalência deverá ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como focal, tendo como consequência a seguinte configuração:

$$VP = \frac{PGTO}{(1+i \times 1)} + \frac{PGTO}{(1+i \times 2)} + \dots + \frac{PGTO + VP}{(1+i \times n)}$$

Fatorando PGTO que é comum aos termos, tem-se:

$$VP = PGTO \times \left[ \frac{1}{(1+i \times 1)} + \frac{1}{(1+i \times 2)} + \dots + \frac{VP}{(1+i \times n)} \right]$$

Considerando que entre os colchetes verifica-se o somatório dos fatores de descapitalização a juros simples de 1 a t, obtém-se:

$$VP = PGTO \times \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i \times t)} + \frac{VP}{(1+i \times n)}$$

Isolando o valor da prestação constante, obtém-se:

$$PGTO = VP \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+i \times n)} \right) \right] \div \left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i \times t)} \right] \quad \text{[XLI]}$$

Aplicando a expressão matemática obtida para o cálculo da prestação e adotando o juro simples como regime de capitalização para se proceder à equivalência, tem-se:

$$PGTO = 100.000 \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+0,10 \times 5)} \right) \right] \div \left[ \frac{1}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{1}{(1+0,10 \times 2)} + \dots + \frac{1}{(1+0,10 \times 5)} \right]$$

$$PGTO = 100.000,00 \times 0,33333 \div 3,8926073$$

$$\mathbf{PGTO = 8.563,24}$$

Considerando a questão conceitual, comprovada cientificamente em [4.2.1], o regime de juros simples, diferentemente do regime de juros compostos, não permite pagamento de partes do capital de \$ 100.000,00, por não admitir o fracionamento de prazo. Logo, não há como fazer um único empréstimo para liquidar em parcelas, constantes ou não. Entretanto, aplicando-se o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos distintos, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a cinco prestações postecipadas mensais e iguais a de \$ 8.563,24 e uma de \$ 100.000,00 junto com a última, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, e os juros sendo iguais à diferença entre o pagamento (montante) e o valor do empréstimo (presente), consideração do valor do dinheiro no tempo. A soma de seus valores atuais, na data zero, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, como se constata:

$$VP_1 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 1)} \rightarrow 7.784,76$$

$$VP_2 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 2)} \rightarrow 7.136,03$$

$$VP_3 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 3)} \rightarrow 6.587,11$$

$$VP_4 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 4)} \rightarrow 6.116,60$$

$$VP_5 = \frac{108.563,24}{(1+0,10 \times 5)} \rightarrow 72.375,49$$

Como restou comprovado, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 7.784,76; \$ 7.136,03; \$ 6.587,11; \$ 6.116,60 e \$ 72.375,49, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco

meses, respectivamente, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 100.000,00; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco pagamentos postecipados mensais e iguais a \$ 8.563,24, mais um pagamento de \$ 100.000,00, junto com a última prestação, ratificando que a soma das partes é igual ao todo e que o SAA não se realiza no regime de juros simples.

### Confirmação 1

Conforme comprovado cientificamente, ao se deduzirem as fórmulas por meio da equivalência de fluxos de caixa e determinar o valor das prestações constantes, considerando que o valor do empréstimo será pago juntamente com a última prestação, com base na equivalência em juros simples e juros compostos, seguindo a mesma analogia, e comparar com a prestação constante do Sistema Americano de Amortização, concluí-se:

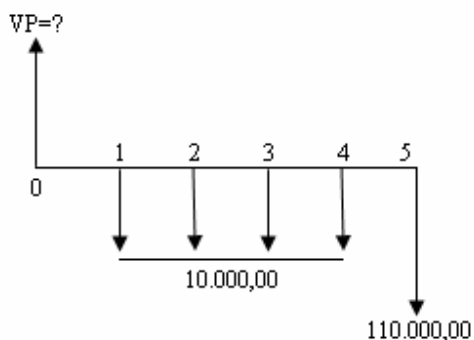
$$\begin{array}{ccc} \text{SIMPLES} & \text{COMPOSTO} & \text{SAA} \\ \text{VP} \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+in)} \right) \right] \div \left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+it)} \right] & \neq \text{VP} \times \left[ \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) \right] \div \left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} \right] & = \text{VP} \times i \end{array}$$

### Confirmação 2

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, será adotada a data zero como data focal e a mesma analogia para se determinar o valor presente das prestações e o valor presente líquido, no fluxo de caixa comum, considerando-se duas situações: mantendo-se o valor original das prestações do Sistema Americano e considerando-se o valor das prestações obtidas por meio da equivalência em juros simples:

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAA.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo é assim representado:



Capitalização composta

$$VP = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^1} + \frac{10.000,00}{(1+0,10)^2} + \frac{10.000,00}{(1+0,10)^3} + \frac{10.000,00}{(1+i)^4} + \frac{110.000,00}{(1+i)^5}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

Capitalização simples

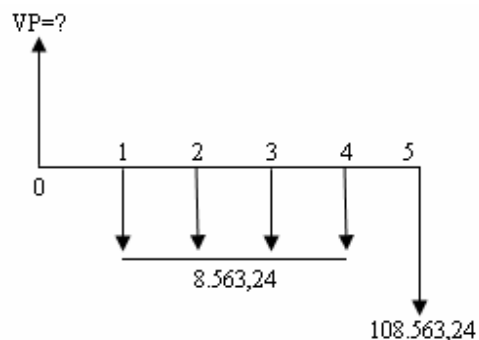
$$VP = \frac{10.000,00}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{10.000,00}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{10.000,00}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{10.000,00}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{110.000,00}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 105.592,74$$

$$VPL = 100.000,00 - 105.592,74 = - 5.592,74$$

- Empréstimos distintos, com prestações obtidas pela equivalência em juros simples.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo é assim representado:

Capitalização simples

$$VP = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{108.563,24}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 100.000,00$$

$$VPL = 100.000,00 - 100.000,00 = 0,00$$

Capitalização composta

$$VP = \frac{8.563,24}{(1+0,10)^1} + \frac{8.563,24}{(1+0,10)^2} + \frac{8.563,24}{(1+0,10)^3} + \frac{8.563,24}{(1+i)^4} + \frac{108.563,24}{(1+i)^5}$$

$$VP = 94.553,55$$

$$VPL = 100.000,00 - 94.553,55 = 5.446,45$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações postecipadas mensais e iguais a \$ 10.000,00, mais uma prestação de \$ 100.000,00 junto com a última, à taxa de 10% ao mês, são equivalentes a \$ 100.000,00, na data zero, somente se forem descapitalizadas (descontadas) a juros compostos; porquanto, a juros simples, seriam equivalentes \$ 105.592,74. Da mesma forma, as cinco prestações mensais de \$ 8.563,24, mais uma prestação de \$ 100.000,00 junto com a última, à taxa de 10% ao mês, são equivalentes a \$ 100.000,00, na data zero, somente se forem descapitalizadas a juros simples; porquanto, a juros compostos, seriam equivalentes a \$ 94.553,55.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros compostos, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se o valor presente líquido for negativo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros simples, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se o valor presente líquido for positivo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

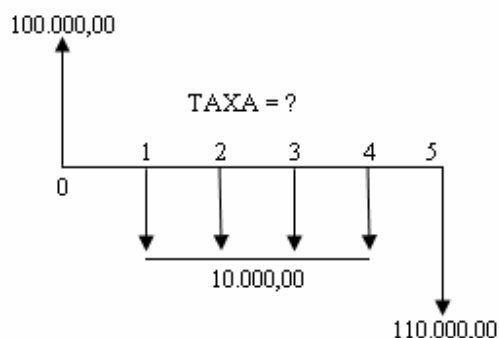
### **Confirmação 3**

Para caracterizar e cotejar os dois regimes de capitalização, será adotada a data zero como data focal e a mesma analogia para se determinar a taxa de juros, no fluxo de caixa comum, considerando-se duas situações: mantendo-se o valor original das prestações do Sistema Americano e considerando-se o valor das prestações obtidas por meio da equivalência em juros simples:

- Empréstimos distintos, com as prestações originais do SAA.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo é assim representado:





### Capitalização composta

$$100.000,00 = \frac{10.000,00}{(1+i)^1} + \frac{10.000,00}{(1+i)^2} + \frac{10.000,00}{(1+i)^3} + \frac{10.000,00}{(1+i)^4} + \frac{110.000,00}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira, que somente calcula a taxa na capitalização composta, como já demonstrado, obtém-se taxa efetiva de 10% ao mês.

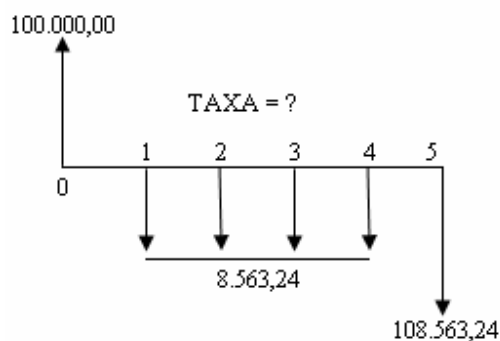
### Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{10.000,00}{(1+i \times 1)} + \frac{10.000,00}{(1+i \times 2)} + \frac{10.000,00}{(1+i \times 3)} + \frac{10.000,00}{(1+i \times 4)} + \frac{110.000,00}{(1+i \times 5)}$$

Determinando-se a taxa mensal do referido fluxo de caixa, por meio do processo de interpolação linear ou utilizando a ferramenta atingir metas do *Microsoft Excel*, como já demonstrado, obtém-se taxa de juros simples de 11,95% ao mês.

- Empréstimos distintos, com prestações obtidas pela equivalência em juros simples.

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo é assim representado:



Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{8.563,24}{(1+i \times 1)} + \frac{8.563,24}{(1+i \times 2)} + \frac{8.563,24}{(1+i \times 3)} + \frac{8.563,24}{(1+i \times 4)} + \frac{108.563,24}{(1+i \times 5)}$$

Determinando-se a taxa mensal do referido fluxo de caixa, por meio do processo de interpolação linear ou utilizando a ferramenta atingir metas do *Microsoft Excel*, como já demonstrado, obtém-se taxa de juros simples de 10,00% ao mês.

Capitalização composta

$$100.000,00 = \frac{8.563,24}{(1+i)^1} + \frac{8.563,24}{(1+i)^2} + \frac{8.563,24}{(1+i)^3} + \frac{8.563,24}{(1+i)^4} + \frac{108.563,24}{(1+i)^5}$$

Determinando-se a taxa efetiva do referido fluxo de caixa, com o auxílio de calculadora financeira, que somente calcula a taxa na capitalização composta, como já demonstrado, obtém-se taxa efetiva de 8,56% ao mês.

Como se observa nas equações, as cinco prestações mensais de \$ 10.000,00, mais uma prestação de 100.000,00 junto com a última, são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00, na data zero, somente se forem de descapitalizadas (descontadas) a juros compostos de 10% ao mês; porquanto, caso fossem a juros simples, a taxa seria de 11,95%. Da mesma forma, as cinco prestações mensais de 8.563,24, mais uma prestação de \$ 100.000,00 junto com a última, são equivalentes ao valor do empréstimo de \$ 100.000,00, na data zero, somente se forem descapitalizadas a juros simples de 10% mês; porquanto, caso fossem a juros compostos, a taxa seria de 8,56%.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros compostos, e o seu resultado for igual à taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos. Entretanto, se a taxa de juros for maior que a taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa efetiva no regime de juros compostos e sim no regime de juros simples.

Da mesma forma, pode-se afirmar com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros simples, e o seu resultado for igual à taxa do empréstimo, esse empréstimo foi realizado

com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se a taxa de juros for menor que a taxa efetiva do empréstimo, esse empréstimo não foi efetivado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

### (b) Há juros embutidos nos saldos devedores

#### Confirmação 1

A princípio, não há necessidade em desmembrar, no valor do pagamento, a parcela relativa aos juros e à amortização. Sendo assim, para compreender a estrutura e o desenvolvimento do SAA, adote-se o mesmo exemplo: empréstimo no valor de \$ 100.000,00, a ser liquidado em 5 prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa contratada de 120% ao ano, capitalização mensal (efetiva de 10% ao mês, para fins didáticos e evidenciar as diferenças entre os regimes), para elaborar a planilha de amortização no Quadro 43, determinando o valor da prestação, o saldo devedor antes e depois do pagamento de cada prestação.

O valor das prestações postecipadas, constantes e mensais, obtido por meio do produto do valor do empréstimo pela taxa periódica, é de \$ 10.000,00; o saldo devedor é o resultado da diferença entre o saldo devedor anterior, acrescido dos juros do período, e o valor do pagamento.

Mês	SD antes PGTO	PGTO	SD após PGTO
0			100.000,00
1	110.000,00	10.000,00	100.000,00
2	110.000,00	10.000,00	100.000,00
3	110.000,00	10.000,00	100.000,00
4	110.000,00	10.000,00	100.000,00
5	110.000,00	110.000,00	zero

Quadro 43: Sistema SAA – Pagamentos e saldos devedores

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 43, a taxa de juros incide sobre o saldo devedor anterior, que contém juros devidos; portanto, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, um valor não contém juro somente quando se encontra na data zero. Se a taxa incidir sobre saldos remanescentes, como é o caso dos saldos devedores nas datas um, dois, três e quatro, a capitalização é composta; pois, esses saldos remanescentes, embora de valores nominais iguais, encontram-se em datas diferentes e posteriores à data zero e, de acordo

com a teoria da preferência pela liquidez (valor do dinheiro no tempo), contêm juros. Em razão da evidência conceitual, não resta dúvida que se trata de juro composto.

Entretanto, há autores que consideram que o pagamento, por ter valor igual ao do juro do período calculado sobre o saldo devedor anterior, liquida esse juro, não restando, dessa forma, juros devidos no saldo devedor. Sendo assim, segundo esses autores, a taxa incidiria sobre o saldo devedor anterior, que não conteria juro devido, exemplo típico de capitalização simples.

Não obstante, é oportuno enfatizar que o valor do juro é totalmente pago somente quando há liquidação integral do empréstimo (capital inicial emprestado + juros devidos totais = saldo devedor), no final de um único período de capitalização, caracterizando uma única operação. Caso contrário, sempre haverá juro devido (vencido) e não pago embutido no saldo devedor, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO E EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO.

Para se comprovar algebricamente a incidência de juros sobre juros (capitalização composta) no exemplo adotado, observe-se o desenvolvimento da planilha de amortização do Sistema Price, constante do Quadro 14, em que se demonstra matematicamente que o saldo devedor independe do valor da amortização de dos juros.

$$SD_1 = SD_0 \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1 + i) - PGTO$$

Substituindo  $SD_1$ , tem-se:

$$SD_2 = [SD_0 \times (1 + i) - PGTO] \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times [(1 + i) + 1]$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times (2 + i) \quad \Rightarrow \quad \text{caracterização de juro composto}$$

Utilizando-se os dados do exemplo prático, tem-se:

$$SD_2 = 100.000,00 \times (1,10)^2 - 10.000,00 \times (2 + 0,10)$$

$$SD_2 = \mathbf{100.000,00}$$

$$SD_3 = SD_2 \times (1 + i) - PGTO$$

Substituindo  $SD_2$ , tem-se:

$$SD_3 = [SD_2 = SD_0 \times (1 + i)^2 - PGTO \times (2 + i)] \times (1 + i) - PGTO$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+i)^3 - PGTO \times (2 + i + 2i + i^2) - PGTO$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+i)^3 - PGTO \times (3 + i + 2i + i^2)$$

$$SD_3 = 100.000,00 \times (1+i)^3 - 10.000,00 \times (3 + 0,10 + 2 \times 0,10 + 0,10^2)$$

$$SD_3 = \mathbf{100.000,00 \dots}$$

Como se depreende, pelo surgimento dos fatores de capitalização composta  $1,10^2$  e  $1,10^3$  na determinação do  $SD_2$  e  $SD_3$ , bem como em todos os outros saldos devedores posteriores, fica comprovada a existência de juros devidos e não pagos (vencidos) nesses saldos devedores; pois, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos confirma a capitalização composta no sistema americano de amortização.

### Confirmação 2

Depois de determinado o valor das parcelas constantes nos sistemas (1) SAA; (2) Equivalência em Juros Compostos e (3) Equivalência em Juros Simples, as planilhas de amortização do empréstimo tomado como exemplo pode ser elaborada, decompondo as prestações em parcelas de juros e amortização, conforme características de cada sistema.

(1) No Sistema Americano, o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior e a diferença entre a prestação e o juro é a amortização do período, conforme Quadro 44:

Período	Prestação	Juro devido	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	10.000,00	10.000,00	0,00	100.000,00
2	10.000,00	10.000,00	0,00	100.000,00
3	10.000,00	10.000,00	0,00	100.000,00
4	10.000,00	10.000,00	0,00	100.000,00
5	110.000,00	10.000,00	100.000,00	zero
<b>Σ</b>	150.000,00	50.000,00	100.000,00	500.000,00

Quadro 44: Sistema SAA – Planilha tradicional

Fonte: Elaborado pelo autor

Para a comprovação da existência de juros devidos (vencidos) e não pagos nos saldos devedores, bases da incidência da taxa efetiva periódica de juros, aplique-se a fórmula genérica do montante de juros compostos [XXVIII] para determinação dos saldos devedores:

$$SD_t = SD_0 \times (1+i)^t - PGTO_1 \times (1+i)^{t-1} - PGTO_2 \times (1+i)^{t-2} \dots - PGTO_t$$

$$SD_2 = 100.000 \times (1,10)^2 - 10.000,00 \times (1,10)^1 - 10.000,00$$

$$SD_3 = 100.000 \times (1,10)^3 - 10.000,00 \times (1,10)^2 - 10.000,00 \times (1,10)^1 - 10.000,00$$

$$SD_4 = 100.000 \times (1,10)^4 - 10.000,00 \times (1,10)^3 - \dots - 10.000,00 \times (1,10)^1 - 10.000,00$$

$$SD_5 = 100.000 \times (1,10)^5 - 10.000,00 \times (1,10)^4 - \dots - 10.000,00 \times (1,10)^1 - 10.000,00$$

Como se observa, pelo surgimento dos fatores de capitalização composta  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ , e  $(1,10)^4$  na determinação dos saldos devedores, fica comprovada a existência de juros devidos e não pagos nesses saldos devedores, e a capitalização composta está caracterizada no Sistema Americano, pela incidência da taxa de juros sobre esses juros devidos (vencidos) e não pagos.

(2) No Sistema Americano com base na equivalência em juros compostos, o juro do período é o resultado da aplicação da fórmula de juros compostos [VII] sobre o valor presente de cada empréstimo ou pela diferença entre o montante de cada empréstimo (valor da prestação) e o valor presente de cada empréstimo (amortização). A amortização é obtida pela descapitalização da prestação (montante) para a data zero ou pela diferença entre a prestação e o referido juro.

$$J_1 = 9.090,91 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 909,09$$

$$A_1 = 10.000,00 - 909,09 \rightarrow A_1 = 9.090,91$$

$$J_2 = 8.264,46 \times [(1+0,10)^2 - 1] \rightarrow J_2 = 1.735,54$$

$$A_2 = 10.000,00 - 1.735,54 \rightarrow A_2 = 8.264,46$$

$$J_3 = 7.513,15 \times [(1+0,10)^3 - 1] \rightarrow J_3 = 2.486,85$$

$$A_3 = 10.000,00 - 2.486,85 \rightarrow A_3 = 7.513,15$$

$$J_4 = 6.830,14 \times [(1+0,10)^4 - 1] \rightarrow J_4 = 3.169,87$$

$$A_4 = 10.000,00 - 3.169,87 \rightarrow A_4 = 6.830,13$$

$$J_5 = 68.301,35 \times [(1+0,10)^5 - 1] \rightarrow J_5 = 41.698,66$$

$$A_5 = 110.000,00 - 41.698,66 \rightarrow A_5 = 68.301,35$$

Considerando cinco empréstimos individuais, a amortização é o valor presente de cada empréstimo e o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma composta até o período igual ao da prestação liquidada, conforme formulação matemática desenvolvida [XXXIII], da seguinte forma:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i)^1$$

$$SD_1 = (100.000 - 9.090,91) \times (1 + 0,10)^1$$

$$SD_1 = 100.000,00$$

$$SD_2 = (VE - A_2 - A_1) \times (1 + i)^2$$

$$SD_2 = (100.000 - 8.264,46 - 9.090,91) \times (1 + 0,10)^2$$

$$SD_2 = 100.000,00$$

$$SD_3 = (VE - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^3$$

$$SD_3 = (100.000 - 8.264,46 - 9.090,91 - 7.513,15) \times (1 + 0,10)^3$$

$$SD_3 = 100.000,00$$

$$SD_4 = (VE - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^4$$

$$SD_4 = (100.000 - 8.264,46 - 9.090,91 - 7.513,15 - 6.830,13) \times (1 + 0,10)^4$$

$$SD_4 = 100.000,00$$

$$SD_5 = (VE - A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i)^5$$

$$SD_5 = (100.000 - 8.264,46 - 9.090,91 - \dots - 6.830,13 - 68.301,35) \times (1 + 0,10)^5$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, todos os saldos devedores, iguais aos do Sistema Americano, contêm juros devidos, e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$ ,  $(1,10)^4$  e  $(1,10)^5$ . Logo, a capitalização composta no Sistema Americano de Amortização é aparente.

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 45:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	10.000,00	909,09	9.090,91	100.000,00
2	10.000,00	1.735,54	8.264,46	100.000,00
3	10.000,00	2.486,85	7.513,15	100.000,00
4	10.000,00	3.169,87	6.830,14	100.000,00
5	110.000,00	41.698,65	68.301,35	0,00
<b>Σ</b>	<b>150.000,00</b>	<b>50.000,00</b>	<b>100.000,00</b>	<b>500.000,00</b>

Quadro 45: Prestação do SAA – Empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se depreende, no sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos - Quadro 45, as prestações e os saldos devedores são exatamente os mesmos da planilha do SAA - Quadro 43; portanto, como comprovado cientificamente, a capitalização composta no Sistema Americano está confirmada.

(3) No Sistema de amortização com base na equivalência em juros simples, o juro do período é o resultado da aplicação da fórmula de juros simples [VII] sobre o valor presente de cada empréstimo ou pela diferença entre o montante de cada empréstimo (valor da prestação) e o valor presente de cada empréstimo (amortização). A amortização, na data zero, é obtida pela descapitalização da prestação, a juros simples, ou pela diferença entre a prestação e o juro.

$$J_1 = 7.784,76 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 778,48$$

$$A_1 = 8.563,24 - 909,09 \rightarrow A_1 = 7.784,76$$

$$J_2 = 7.136,03 \times 0,10 \times 2 \rightarrow J_2 = 1.427,21$$

$$A_2 = 8.563,24 - 1.427,21 \rightarrow A_2 = 7.136,03$$

$$J_3 = 6.587,11 \times 0,10 \times 3 \rightarrow J_3 = 1.976,13$$

$$A_3 = 8.563,24 - 1.976,13 \rightarrow A_3 = 6.587,11$$

$$J_4 = 6.116,60 \times 0,10 \times 4 \rightarrow J_4 = 2.446,64$$

$$A_4 = 8.563,24 - 2.446,64 \rightarrow A_4 = 6.116,60$$



$$J_5 = 72.375,49 \times 0,10 \times 5 \rightarrow J_5 = 36.187,75$$

$$A_5 = 108.563,24 - 36.187,75 \rightarrow A_5 = 72.375,49$$

Considerando cinco empréstimos individuais, a juros simples, a amortização é o valor presente de cada empréstimo, cuja soma se traduz em um único empréstimo de \$ 100.000,00, igual ao do SAA; porém com prestações diferentes, confirmando que o referido sistema não se processa no regime de capitalização simples. Além disso, o saldo devedor de cada período é obtido pela diferença entre o total dos valores presentes (VE = valor total do empréstimo), como se fossem um único empréstimo, e as amortizações havidas, capitalizando-se de forma simples até o período igual ao da prestação liquidada, conforme formulação matemática desenvolvida [XXXIV], da seguinte forma:

$$SD_1 = (VE - A_1) \times (1 + i \times 1)$$

$$SD_1 = (100.000,00 - 7.784,76) \times (1 + 0,10 \times 1)$$

$$SD_1 = 101.436,76$$

$$SD_2 = (VE - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 3)$$

$$SD_2 = (100.000,00 - 7.784,76 - 7.136,03) \times (1 + 0,10 \times 2)$$

$$SD_2 = 102.095,05$$

$$SD_3 = (VE - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 3)$$

$$SD_3 = (100.000,00 - 7.784,76 - 7.136,03 - 6.587,11) \times (1 + 0,10 \times 3)$$

$$SD_3 = 102.039,72$$

$$SD_4 = (VE - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + i \times 4)$$

$$SD_4 = (100.000,00 - 7.784,76 - 7.136,03 - 6.587,11 - 6.116,60) \times (1 + 0,10 \times 4)$$

$$SD_4 = 101.325,69$$

$$SD_5 = (VE - A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1) \times (1 + 0,10 \times 5)$$

$$SD_5 = (100.000,00 - 7.784,76 - 7.136,03 - \dots - 6.116,00 - 72.375,49) \times (1 + 0,10 \times 5)$$

$$SD_5 = 0,00$$

Como se observa, os saldos devedores, embora contenham juros simples, não servem de base para o cálculo dos juros do período, os quais foram calculados sobre o valor de cada empréstimo e não somados a esses valores para exigir novos juros nos períodos seguintes, caracterizando a capitalização simples, ratificada pelo aparecimento dos fatores de capitalização simples: (1,20), (1,30), (1,40) e (1,50), confirmando que o SAA não se realiza nesse regime.

Depois de calculados os componentes do empréstimo, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 46:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	8.563,24	778,48	7.784,76	101.436,76
2	8.563,24	1.427,21	7.136,03	102.095,04
3	8.563,24	1.976,13	6.587,11	102.039,72
4	8.563,24	2.446,64	6.116,60	101.325,69
5	108.563,24	36.187,75	72.375,49	0,00
<b>Σ</b>	<b>142.816,20</b>	<b>42.816,20</b>	<b>100.000,00</b>	<b>506.897,21</b>

Quadro 46: Prestações constantes (SAA) – Empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se percebe, no sistema de amortização com base na equivalência em juros simples - Quadro 46, ao manter o valor da prestação constante, mais o valor do empréstimo junto com a última prestação, todos os demais elementos da planilha são diferentes aos do SAA, comprovando cientificamente que o SAA não se processa a juros simples. O saldo devedor de cada período é obtido por meio de equivalência na data zero, única data em que um valor não contém juro, determinando-se o montante de juros simples do saldo entre os valores presentes dos empréstimos - como se fosse único - e as amortizações havidas; portanto, fica comprovada a inexistência de juros sobre juros, ratificando que o SAA não se processa nesse regime.

Enfatize-se que não é conceitualmente correto fazer incidir a taxa sobre o saldo devedor anterior, para concluir que o empréstimo não foi totalmente liquidado, restando um saldo a pagar de \$ 8.771,56; porquanto, a taxa está sendo aplicada sobre base diferente daquela definida no sistema em juros simples. Além disso, em razão da cindibilidade de prazo, se a taxa incidir sobre o saldo devedor anterior, a capitalização deixa de ser simples, conforme comprovação científica nos itens APLICAÇÃO e EMPRÉSTIMO EM DINHEIRO, além de o Sistema Americano e sistema de amortização com base na equivalência em juros compostos, fazendo analogia com sistema de amortização a juros simples.

Da mesma forma, atente-se ao fato de que a equivalência na capitalização simples ocorre somente na data zero, conforme comprovação matemática [4.2.1]. Portanto, é conceitualmente incorreto proceder à equivalência na data cinco, concluindo que o valor do empréstimo não foi remunerado de forma equânime ao montante das parcelas, aplicadas tanto a juros simples como compostos, favorecendo financeiramente ao credor.

Considerando que não há aplicação de parcelas a juros simples, a não ser que se faça uma a uma, com vencimento a termo, o sistema de amortização a juros simples evidencia-se como não adequado como decisão financeira, tanto sob o ponto de vista matemático, como de gestão; porquanto, não há equivalência financeira entre a captação de recursos a juros compostos, Caderneta de Poupança e FGTS, por exemplo, e aplicação a juros simples.

### **Confirmação 3**

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, determinam-se os saldos devedores após o pagamento de cada prestação, com base na equivalência em juros compostos e juros simples.

#### **Capitalização composta**

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.2, a equivalência na capitalização composta pode ser efetivada em qualquer data focal. Portanto, o saldo devedor em qualquer período nada mais é do que o valor presente das prestações postecipadas vincendas, mais o valor presente do valor do empréstimo, na data do saldo devedor pretendido.

Entretanto, para proceder à analogia com o sistema com base na equivalência em juros simples, o saldo devedor será também determinado por meio de equivalência. Para isso, será adotada a data zero como focal, ou seja, determina-se o valor presente das parcelas vincendas, mais o valor presente do valor do empréstimo, na data zero, e capitaliza-se, de forma composta, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

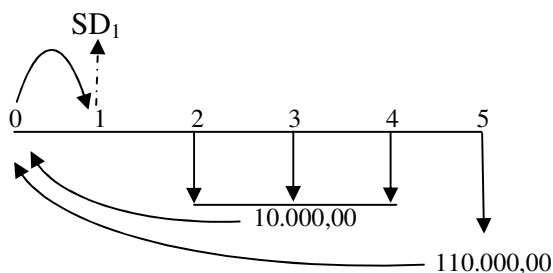
- Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação

$$SD_1 = 10.000,00 \times \frac{(1 + 0,10)^4 - 1}{(1 + 0,10)^4 \times 0,10} + \frac{100.000,00}{(1 + 0,10)^4}$$

$$SD_1 = 100.000,00$$

Para poder comparar com o regime de capitalização simples, determina-se o valor presente das quatro prestações vincendas e do valor do empréstimo, na data zero, e capitaliza-se um período, conforme fluxo:

- Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação:



$$SD_0 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^2} + \frac{10.000,00}{(1+0,10)^3} + \frac{10.000,00}{(1+0,10)^4} + \frac{110.000,00}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 90.909,09$$

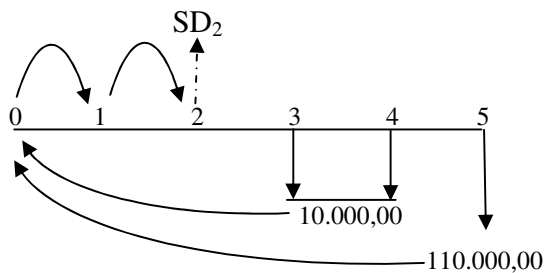
$$SD_1 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \rightarrow \mathbf{100.000,00}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação:

$$SD_2 = 10.000,00 \times \frac{(1+0,10)^3 - 1}{(1+0,10)^3 \times 0,10} + \frac{100.000,00}{(1+0,10)^3}$$

$$SD_2 = 100.000,00$$

Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente das três prestações vincendas e do valor do empréstimo, na data zero, e capitalizam-se dois períodos, de forma composta, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^3} + \frac{10.000,00}{(1+0,10)^4} + \frac{110.000,00}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 82.644,63$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

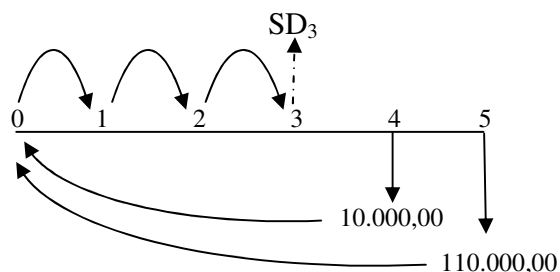
$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10)^2 \rightarrow \mathbf{100.000,00}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação:

$$SD_3 = 10.000,00 \times \frac{(1+0,10)^2 - 1}{(1+0,10)^2 \times 0,10} + \frac{100.000,00}{(1+0,10)^2}$$

$$SD_3 = 100.000,00$$

Para comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente das duas prestações vincendas e do valor do empréstimo, na data zero, e capitalizam-se três períodos, de forma composta, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{10.000,00}{(1+0,10)^4} + \frac{110.000,00}{(1+0,10)^5}$$

$$SD_0 = 75.131,48$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1 \times (1+0,10)^1$$

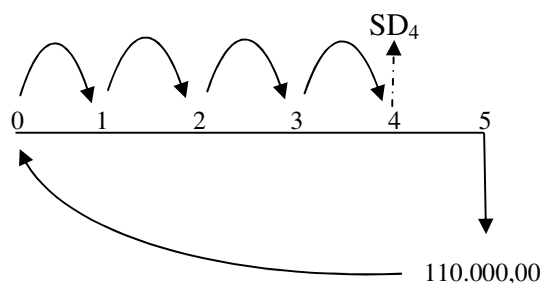
$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10)^3 \rightarrow \mathbf{100.000,00}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação:

$$SD_4 = 10.000,00 \times \frac{(1 + 0,10)^1 - 1}{(1 + 0,10)^1 \times 0,10} + \frac{100.000,00}{(1 + 0,10)^1}$$

$$SD_4 = 100.000,00$$

Para se comparar com a capitalização simples, determina-se o valor presente do último pagamento vincendo, na data zero, e capitalizam-se quatro períodos, de forma composta, conforme fluxo:



$$SD_0 = \frac{110.000,00}{(1 + 0,10)^5}$$

$$SD_0 = 68.301,35$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1 + 0,10)^1 \times (1 + 0,10)^1 \times (1 + 0,10)^1 \times (1 + 0,10)^1$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1 + 0,10)^4 \rightarrow \mathbf{100.000,00}$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma composta até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 47:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	10.000,00	909,09	9.090,91	90.909,09	100.000,00
2	10.000,00	1.735,54	8.264,46	82.644,63	100.000,00
3	10.000,00	2.486,85	7.513,15	75.131,48	100.000,00
4	10.000,00	3.169,87	6.830,13	68.301,35	100.000,00
5	110.000,00	41.698,65	68.301,35	0,00	0,00
<b>Σ</b>	<b>150.000,00</b>	<b>50.000,00</b>	<b>100.000,00</b>	<b>416.986,55</b>	<b>500.000,00</b>

Quadro 47: Sistema SAA – Saldo devedor na data zero, capitalizado (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como já demonstrado cientificamente no item 4.2.2, a capitalização composta permite o fracionamento de prazo, possibilitando realizar a equivalência em qualquer data focal. Entretanto, para se fazer analogia com a capitalização simples, em que é obrigatória a equivalência na data zero, adota-se essa mesma data focal. Como se constata nos cálculos dos quatro saldos devedores, a taxa de juros incide sempre sobre o resultado do valor presente total do empréstimo menos as amortizações havidas, na data zero, capitalizando de forma composta até a data do saldo devedor pretendido, comprovando a existência de juros devidos e não pagos no saldo devedor.

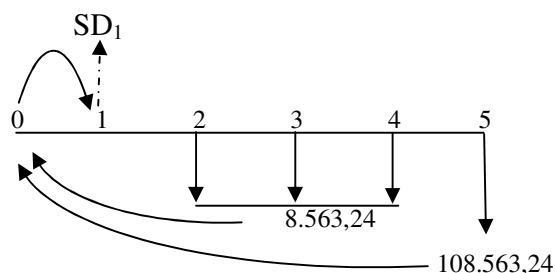
Destaque-se que, ao se determinar o valor presente das parcelas postecipadas vincendas e do valor do empréstimo, os juros constantes dessas parcelas e do valor do empréstimo foram desembutados. Portanto, nada há de juro futuro no saldo devedor determinado.

No entanto, constata-se que todos os saldos devedores contêm juros anteriores à data do saldo devedor determinado; portanto, juros vencidos e não pagos, e a incidência da taxa de juros sobre esses saldos devedores caracteriza a capitalização composta:  $(1,10)^2$ ,  $(1,10)^3$  e  $(1,10)^4$ . Como a taxa de juros incide sempre sobre juros anteriores à data base de cálculo, a incidência da taxa de juros sobre juros vencidos e não pagos confirma-se como característica da capitalização composta. Portanto, ratifica-se que o Sistema Americano, que possui o mesmo valor presente, as mesmas prestações e os mesmos saldos devedores, se realiza nesse regime de capitalização.

### Capitalização simples

Considerando a questão conceitual e comprovação científica no item 4.2.1, a equivalência na capitalização simples tem que ser efetivada obrigatoriamente na data focal zero, ou seja, determina-se o valor presente das parcelas vincendas, na data zero, e capitaliza-se, de forma simples, até a data do saldo devedor pretendido, conforme fluxos e respectivos cálculos:

- Saldo devedor após o pagamento a 1ª prestação:

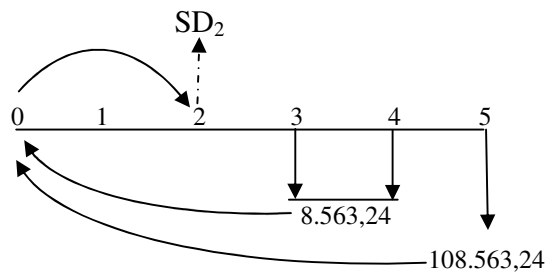


$$SD_0 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{108.563,24}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 92.215,23$$

$$SD_1 = SD_0 \times (1+0,10 \times 1) \rightarrow \mathbf{101.436,76}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 2ª prestação:

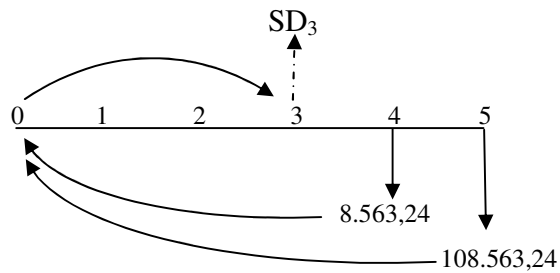


$$SD_0 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{108.563,24}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 85.079,20$$

$$SD_2 = SD_0 \times (1+0,10 \times 2) \rightarrow \mathbf{102.095,04}$$

- Saldo devedor após o pagamento a 3ª prestação:



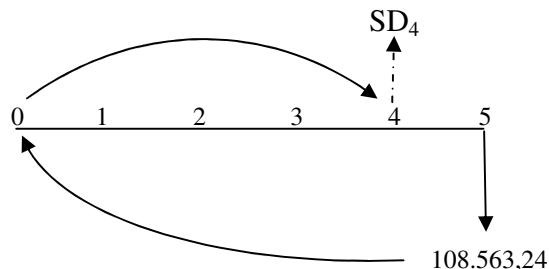
$$SD_0 = \frac{8.563,24}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{108.563,24}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 78.492,09$$

$$SD_3 = SD_0 \times (1+0,10 \times 3) \rightarrow \mathbf{102.039,72}$$



- Saldo devedor após o pagamento a 4ª prestação:



$$SD_0 = \frac{108.563,24}{(1 + 0,10 \times 5)}$$

$$SD_0 = 72.375,49$$

$$SD_4 = SD_0 \times (1 + 0,10 \times 4) \rightarrow \mathbf{101.325,69}$$

Depois de calculados os componentes do empréstimo, inclusive os saldos devedores na data zero, capitalizando de forma simples até a data do período de um saldo devedor pretendido, elabora-se a planilha de amortização, conforme Quadro 48:

Período	Prestação	Juro pago	Amortização	SD <sub>0</sub>	SD <sub>t</sub>
0				100.000,00	100.000,00
1	8.563,24	778,48	7.784,76	92.215,24	101.436,76
2	8.563,24	1.427,21	7.136,03	85.079,20	102.095,04
3	8.563,24	1.976,13	6.587,11	78.492,10	102.039,72
4	8.563,24	2.446,64	6.116,60	72.375,50	101.325,69
5	108.563,24	36.187,75	72.375,49	0,00	0,00
<b>Σ</b>	142.816,20	42.816,20	100.000,00	328.162,04	506.897,21

Quadro 48: Sistema SAA – Saldo devedor na data zero, capitalizado (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como cientificamente demonstrado no item 4.2.1, a capitalização simples não permite o fracionamento de prazo, vencendo a termo, razão de a equivalência ter que ser realizada na data focal zero. Como se constata nos cálculos dos saldos devedores, embora contenham juros devidos (vencidos) e não pagos, não servem de base para o cálculo dos juros periódicos; pois, a taxa de juros simples incide sempre sobre o resultado do valor presente total dos empréstimos menos as amortizações havidas, na data zero, descaracterizando a incidência de juros sobre juros. Além

disso, o surgimento dos fatores de capitalização (1,10); (1,20); (1,30); (1,40) e (1,50) comprovam a capitalização simples, ratificando que o Sistema Americano não se realiza nesse regime.

#### **Confirmação 4**

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, por meio da elaboração de planilhas nos sistemas de amortização com base na equivalência em juros simples e juros compostos, determinando os respectivos juros e demais componentes dos sistemas de amortização, período a período, para caracterizar os dois regimes de capitalização e comparar com o Sistema Americano.

#### **Capitalização simples**

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, com base nas parcelas constantes no sistema de amortização no regime simples, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com o sistema com base na equivalência em juros compostos e Americano.

A referida planilha está apresentada no Quadro 49. Reitere-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o valor das parcelas vincendas mais o valor do empréstimo, na data zero, e as amortizações havidas, capitalizando a juros simples, até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS SIMPLES PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								100.000,00	
1°	7.784,76	778,48					778,48	8.563,24	101.436,76
2°	7.136,03	713,60	713,60				1.427,21	8.563,24	102.095,04
3°	6.587,11	658,71	658,71	658,71			1.976,13	8.563,24	102.039,72
4°	6.116,60	611,66	611,66	611,66	611,66		2.446,64	8.563,24	101.325,69
5°	72.375,49	7.237,55	7.237,55	7.237,55	7.237,55	7.237,55	36.187,75	108.563,24	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	9.221,52	8.507,92	7.849,21	7.237,55	42.816,20	142.816,20	506.897,21

Quadro 49: Sistema SAA - Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 49, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais a \$ 8.563,24, mais um pagamento de \$ 100.000,00 junto com a última prestação, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente (valor do empréstimo), é o juro simples do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São constantes em cada período, em razão de a taxa de juros incidir sempre sobre a mesma base, igual ao valor do empréstimo, caracterizando o regime simples de capitalização, como se constata:

1º Empréstimo

$$C_1 = 7.784,76$$

$$J_1 = 7.784,76 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 778,48$$

2º Empréstimo

$$C_1 = 7.136,03$$

$$J_1 = 7.136,03 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 713,60$$

$$C_2 = 7.136,03$$

$$J_2 = 7.136,03 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = \frac{713,60}{1.427,20}$$

3º Empréstimo

$$C_1 = 6.587,11$$

$$J_1 = 6.587,11 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_1 = 658,71$$

$$C_2 = 6.587,11$$

$$J_2 = 6.587,11 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_2 = 658,71$$

$$C_3 = 6.587,11$$

$$J_3 = 6.587,11 \times 0,10 \times 1 \rightarrow J_3 = \frac{658,71}{1.976,13} \dots$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o **total de juros devidos \$ 10.000,00**, correspondentes ao somatório de todos os juros simples relativos ao primeiro mês de cada empréstimo. Portanto, a única hipótese de \$ 10.000,00 serem os juros do primeiro mês é se o empréstimo fosse integralmente liquidado por \$ 110.000,00, no final desse período.

Entretanto, evidencie-se que, ao se pagar a primeira prestação de \$ 8.563,24, está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 7.784,76, com respectivos juros simples de \$ 778,48; ao se pagar a segunda prestação de \$ 8.563,24, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 7.136,03, com respectivos juros simples de \$ 1.427,21, sendo \$ 713,60 do 1º mês e \$ 713,60 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros simples pelo prazo decorrido de um mês:

Empréstimos remanescentes:  $7.136,03 + 6.587,11 + 6.116,60 + 72.375,49 = 92.215,23$

Respectivos juros, vencidos:  $713,60 + 658,71 + 611,66 + 7.237,55 = 9.221,52$ .

Saldo devedor:  $92.215,23 + 9.221,52 = \mathbf{101.436,75}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo restam três empréstimos, mais os respectivos juros simples pelo prazo decorrido de dois meses:

Empréstimos remanescentes:  $6.587,11 + 6.116,60 + 72.375,49 = 85.079,20$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $658,71 + 611,66 + 7.237,55 = 8.507,92$

2º mês:  $658,71 + 611,66 + 7.237,55 = 8.507,92$

Saldo devedor:  $85.079,20 + 8.507,92 + 8.507,92 = \mathbf{102.095,04}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo decorrido de três meses:

Empréstimos remanescentes:  $6.116,60 + 72.375,49 = 78.492,09$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $611,66 + 7.237,55 = 7.849,21$ .

2º mês:  $611,66 + 7.237,55 = 7.849,21$

3º mês:  $611,66 + 7.237,55 = 7.849,21$

Saldo devedor:  $78.492,09 + 7.849,21 + 7.849,21 + 7.849,21 = \mathbf{102.039,72}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo, resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo decorrido de quatro meses:

Empréstimos remanescentes: 72.375,49

Respectivos juros, vencidos: 1º mês: 7.237,55

2º mês: 7.237,55

3º mês: 7.237,55

4º mês: 7.237,55

Saldo devedor:  $72.375,49 + 7.237,55 + 7.237,55 + 7.237,55 + 7.237,55 = \mathbf{101.325,69}$

Ao decompor os saldos devedores após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros simples. Entretanto, como ficou caracterizado, a taxa não incide sobre esses saldos devedores, como no SAA, e sim sobre o valor de cada empréstimo, demonstrando matematicamente que o Sistema Americano não se realiza no regime de capitalização simples.

#### Capitalização composta

Depois de determinado o valor de cada um dos cinco empréstimos, com parcelas constantes calculadas com base na equivalência em juros compostos, elabora-se a planilha de amortização, para cotejar com os sistemas de amortização simples e Americano.

A referida planilha está apresentada no Quadro 50. Reitere-se que o juro do período é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o saldo devedor anterior, com

respectivos juros, e os valores pagos, ou o valor presente das parcelas postecipadas vincendas ou, ainda, a diferença entre o valor presente das parcelas vincendas (data zero) e as amortizações havidas, capitalizando de forma simples até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRESTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVENDOR
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA	
0								100.000,00
1°	9.090,91	909,09				909,09	10.000,00	100.000,00
2°	8.264,46	826,45	909,09			1.735,54	10.000,00	100.000,00
3°	7.513,15	751,31	826,45	909,09		2.486,85	10.000,00	100.000,00
4°	6.830,13	683,01	751,31	826,45	909,09	3.169,87	10.000,00	100.000,00
5°	68.301,35	6.830,13	7.513,15	8.264,46	9.090,91	10.000,00	41.698,65	110.000,00
Σ	100.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	50.000,00	150.000,00
								500.000,00

Quadro 50: Sistema SAA – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (composto)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 50, a soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais a \$ 10.000,00, mais uma prestação de \$ 100.000,00 junto com a última, determinadas conforme Sistema Americano, é igual ao valor de um único empréstimo de \$ 100.000,00, da mesma forma que o total de juros. A diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente (valor do empréstimo), é o juro do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. São crescentes, geometricamente, em razão da incidência da taxa de juros sobre juros formados nos períodos anteriores, caracterizando o regime composto de capitalização, como se constata:

#### 1º Empréstimo

$$C_1 = 9.090,91$$

$$J_1 = 9.090,91 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 909,09$$

#### 2º Empréstimo

$$C_1 = 8.264,46$$

$$J_1 = 8.264,46 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 826,45$$

$$C_2 = 8.264,46 + 826,45 = 9.090,91$$

$$J_2 = 9.090,91 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = \frac{909,09}{1.735,54}$$

3º Empréstimo

$$C_1 = 7.513,15$$

$$J_1 = 7.513,15 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_1 = 751,31$$

$$C_2 = 7.513,15 + 751,31 = 8.264,46$$

$$J_2 = 8.264,46 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_2 = 826,45$$

$$C_3 = 8.264,46 + 826,45 = 9.090,91$$

$$J_3 = 9.090,91 \times [(1+0,10)^1 - 1] \rightarrow J_3 = \frac{909,09}{2.486,85} \dots$$

Observe-se que, decorrido o 1º mês, ao fazer incidir 10% sobre o valor de um único empréstimo, determina-se o **total de juros devidos \$ 10.000,00**, correspondentes ao somatório de todos os juros compostos relativos ao primeiro mês de cada empréstimo. Portanto, a única hipótese de \$ 10.000,00 serem os juros do primeiro mês é se o empréstimo fosse totalmente liquidado por \$ 110.000,00, no final desse período.

Entretanto, evidencie-se que, ao se pagar a primeira prestação de \$ 10.000,00, está se liquidando o 1º empréstimo, no valor de \$ 9.090,91, com respectivos juros de \$ 909,09; ao se pagar a segunda prestação de \$ 10.000,00, está se liquidando o 2º empréstimo, no valor de \$ 8.264,46, com respectivos juros de \$ 1.735,54, sendo \$ 826,45 do 1º mês e \$ 909,09 do 2º mês, e assim sucessivamente, até liquidação completa da dívida.

Os saldos devedores, após o pagamento de cada empréstimo, referentes aos empréstimos remanescentes, são assim construídos:

- **Saldo devedor após o pagamento do 1º empréstimo:**

Após o pagamento do 1º empréstimo, restam quatro empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de um mês decorrido:

$$\text{Empréstimos remanescentes: } 8.264,46 + 7.513,15 + 6.830,13 + 68.301,35 = 90.909,09$$

$$\text{Respectivos juros, vencidos: } 826,45 + 751,31 + 683,01 + 6.830,13 = 9.090,91.$$

$$\text{Saldo devedor: } 90.909,09 + 9.090,91 = \mathbf{100.000,00}$$

- **Saldo devedor após o pagamento do 2º empréstimo:**

Após o pagamento do 2º empréstimo, restam três empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de dois meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $7.513,15 + 6.830,13 + 68.301,35 = 82.644,63$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $751,31 + 683,01 + 6.830,13 = 8.264,46$

2º mês:  $826,45 + 751,31 + 7.513,15 = 9.090,91$

Saldo devedor:  $82.644,63 + 8.264,46 + 9.090,91 = \mathbf{100.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 3º empréstimo:**

Após o pagamento do 3º empréstimo, restam dois empréstimos, mais os respectivos juros pelo prazo de três meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $6.830,13 + 68.301,35 = 75.131,48$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $683,01 + 6.830,13 = 7.513,15$ .

2º mês:  $751,31 + 7.513,15 = 8.264,46$

3º mês:  $826,45 + 8.264,46 = 9.090,91$

Saldo devedor:  $75.131,48 + 7.513,15 + 8.264,46 + 9.090,91 = \mathbf{100.000,00}$

- **Saldo devedor após o pagamento do 4º empréstimo:**

Após o pagamento do 4º empréstimo, resta apenas o 5º empréstimo, mais os respectivos juros pelo prazo de quatro meses decorridos:

Empréstimos remanescentes:  $68.301,35$

Respectivos juros, vencidos: 1º mês:  $6.830,13$ .

2º mês:  $7.513,15$ .....

4º mês:  $9.090,91$

Saldo devedor:  $68.301,35 + 6.830,13 + 7.513,15 + 8.264,46 + 9.090,91 = \mathbf{100.000,00}$



Pode-se inferir, então, que os pagamentos, embora por alguns autores denominados juros, são efetivamente montantes, restando montantes como saldos devedores; pois, o regime de capitalização composta, diferentemente do simples, não vence a termo, e o fracionamento de prazo o caracteriza.

Não há, portanto, como admitir que se trate de capitalização simples, aceitando os argumentos de que os juros devidos foram pagos e a taxa estaria incidindo sobre o capital inicial emprestado. A taxa somente incidiria sobre o capital inicial emprestado se os pagamentos fossem simplesmente ignorados e, de acordo com a teoria da preferência pela liquidez, um valor somente não contém juro quando se encontra na data zero; o que não é o caso, uma vez que taxa incide sobre valores nas datas um, dois, três e quatro.

Ao decompor os saldos devedores, após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros, e como a taxa de juros incide sobre esses saldos, fica matematicamente comprovada a capitalização composta no Sistema Americano.

#### 6.4 SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE – Método de Gauss

A denominação Método de Gauss ao sistema de amortização que tem como principal característica a liquidação de empréstimos por meio de prestações periódicas e constantes se deve ao feito do matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss, tido como o descobridor da fórmula para determinar a soma dos termos de uma progressão aritmética, utilizada no desenvolvimento da fórmula para o cálculo das referidas prestações, quando da equivalência entre as prestações constantes e o valor do empréstimo, na data de vencimento da série de pagamentos.

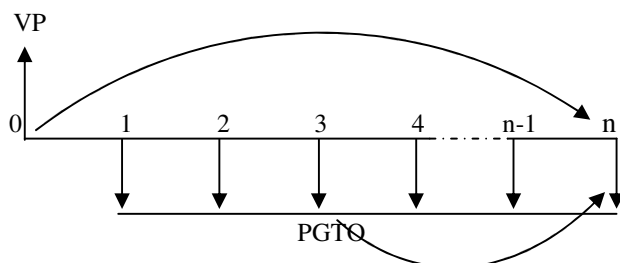
Esse sistema foi, pretensamente, desenvolvido, no regime de juros simples, com a equivalência sendo realizada na data do valor futuro, para liquidação de operações por meio de pagamentos periódicos, iguais e sucessivos, resultado do somatório dos encargos financeiros (juros) e da parcela de capital (amortização), que é crescente em progressão aritmética, com o intuito de substituir a Tabela Price, que se realiza no regime de juros compostos, com a amortização crescente em progressão geométrica.

O valor da prestação constante é obtido mediante a utilização da propriedade da soma dos termos de uma progressão aritmética. O valor da primeira amortização é obtido mediante a utilização das propriedades do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética. O

valor dos juros, por conseguinte, é obtido pela diferença entre a prestação e a amortização do período, e o saldo devedor pela diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período.

Para maior clareza, tome-se como exemplo um empréstimo de valor igual a **VP** (valor presente), que será liquidado em **n** prestações periódicas e iguais, com a primeira sendo paga no final do primeiro período, postecipada, a uma taxa de juros **i** por período igual ao das parcelas, e determine-se a prestação constante e periódica (PGTO), utilizando a capitalização simples para proceder à equivalência no final da série, com data focal igual à da última prestação:

O fluxo de caixa desse empréstimo fica assim representado:



Observe-se que esse fluxo está de acordo com o fluxo de caixa modelo-padrão, sendo, por isso, uma série postecipada, em que o valor presente ocorre um período antes da primeira parcela e o valor futuro na mesma data da última. Como se verificou no modelo-padrão, Tabela Price, a obtenção do valor da prestação constante se dá tanto por meio da equivalência com o valor presente, como com o valor futuro, característica exclusiva da capitalização composta [X]:

$$VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} = VF \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Como a equivalência na data **n** é condição do Modelo de Gauss, primeiramente determina-se o valor futuro do empréstimo, utilizando a igualdade [III]:  $VF = VP (1+in)$ .

O valor futuro (VF) desse fluxo de caixa (PGTO), em juros simples, para uma taxa (**i**) definida em período igual ao período do fluxo, é determinado pelo somatório dos valores futuros (data focal **n**) de cada um dos pagamentos, obtendo-se a seguinte equação de valor:

$$VF = PGTO + PGTO(1+i \times 1) + PGTO(1+i \times 2) + \dots + PGTO[1+i \times (n-1)]$$

Colocando-se em evidência PGTO, comum a todos os fatores, e substituindo o valor futuro, tem-se:

$$VP \times (1 + i \times n) = PGTO \times [1 + (1 + i \times 1) + (1 + i \times 2) + \dots + [1 + i \times (n - 1)]]$$

O fato de as prestações serem constantes permite a obtenção de fórmulas simplificadas para o desconto e a capitalização dessas parcelas; pois, a soma dessas parcelas constitui-se na soma dos termos uma progressão aritmética. Observa-se que entre os colchetes tem-se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética limitada, cujo primeiro termo ( $a_1$ ) é 1, o último ( $a_n$ ) é  $[1 + i \times (n - 1)]$  e a razão (r) é i.

$$\text{Como a Soma}_{PA} = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} \quad \rightarrow \quad VP \times (1 + i \times n) = PGTO \times \frac{[1 + 1 + i \times (n - 1)] \times n}{2}$$

Isolando-se a variável PGTO, obtém-se:

$$PGTO = \frac{2VP \times (1 + i \times n)}{[2 + (n - 1) \times i] \times n} \quad \text{[XLII]}$$

Depois de determinado o valor das parcelas constantes, para a elaboração da planilha de amortização é necessário obter o valor das amortizações. Considerando que as amortizações crescem em forma de progressão aritmética com razão igual ao resultado do produto da primeira amortização pela taxa periódica e o total das amortizações é o valor do empréstimo, pode-se determinar o valor da primeira amortização utilizando-se a propriedade do termo geral de uma progressão aritmética:  $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$

Se o primeiro termo é a primeira amortização  $A_1$ , o último  $A_n$  e a razão o produto da primeira amortização pela taxa periódica, obtém-se:

$$A_n = A_1 + (n - 1) \times A_1 \times i \quad \rightarrow \quad A_n = A_1 \times [1 + (n - 1) \times i]$$

Como a soma das amortizações é igual ao valor do empréstimo, tem-se:

$$VP = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2} \quad \rightarrow \quad VP = \frac{(A_1 + A_1 \times [1 + (n-1) \times i]) \times n}{2}$$

Procedendo-se às devidas fatorações e isolando a primeira amortização, obtém-se:

$$A_1 = \frac{2VP}{[2 + (n-1) \times i] \times n} \quad \text{[XLIII]}$$

Ao se considerar genericamente  $a_t$  como a amortização de um período  $t$ , qualquer, e como as amortizações crescem a um valor constante, em progressão aritmética, com razão igual ao produto da primeira amortização pela taxa periódica, aplica-se a fórmula do termo geral:

$$A_t = A_1 \times [1 + (t-1) \times i] \quad \text{[XLIV]}$$

Em qualquer sistema de amortização, o valor dos juros é a diferença entre o valor da prestação e o valor da amortização. Considerando que a prestação é constante e a amortização cresce conforme uma progressão aritmética de razão igual ao produto da primeira prestação pela taxa periódica, os juros decrescerão a essa mesma constante. Sendo assim, o juro contido na primeira parcela é a diferença entre o valor da prestação constante e a primeira amortização, cujas expressões matemáticas já foram desenvolvidas em [XLII] e [XLIII], respectivamente:

$$J_1 = PGTO - A_1$$

$$J_1 = \frac{2VP \times (1 + i \times n)}{[2 + (n-1) \times i] \times n} - \frac{2VP}{[2 + (n-1) \times i] \times n}$$

Procedendo-se às devidas fatorações e simplificações, obtém-se:

$$J_1 = \frac{2VP \times i}{2 + (n-1) \times i} \quad \text{[XLV]}$$

Ao se considerar genericamente  $J_t$  como o juro de um período  $t$ , qualquer, como os juros decrescem a uma constante, em progressão aritmética, com razão negativa igual ao produto da primeira amortização pela taxa periódica, tem-se:

$$J_2 = J_1 - A_1 \times i \quad \rightarrow \quad J_3 = J_1 - 2A_1 \times i \quad \rightarrow \quad J_t = J_1 - (t-1) \times A_1 \times i \quad \text{[XLVI]}$$

Da mesma forma que nos sistemas de amortizações usuais, os saldos devedores do Método de Gauss são obtidos pela simples diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período:  $SD_t = SD_{t-1} - A_t$

Para melhor compreender e cotejar com outros sistemas de amortização, admita-se o mesmo exemplo envolvendo um empréstimo de \$ 100.000,00 (VP), a ser liquidado em cinco ( $t$ ) prestações mensais e iguais, sem entrada, a uma taxa efetiva de juros de 10% ao mês ( $i$ ) e determinem-se os elementos para a elaboração da planilha de amortização, considerando o Método de Gauss.

$$PGTO = \frac{2 \times 100.000 \times (1 + 0,10 \times 5)}{[2 + (5 - 1) \times 0,10] \times 5} \rightarrow 25.000,00$$

$$A_1 = \frac{2 \times 100.000}{[2 + (5 - 1) \times 0,10] \times 5} \rightarrow 16.666,67$$

$$J_1 = \frac{2 \times 100.000 \times 0,10}{2 + (5 - 1) \times 0,10} \rightarrow 8.333,33$$

Depois de determinados os valores dos componentes do sistema, resgatando que o valor da amortização e dos juros crescem e decrescem periódica e respectivamente a uma constante igual ao produto da primeira amortização pela taxa, a planilha de amortização pode ser elaborada, conforme Quadro 51:

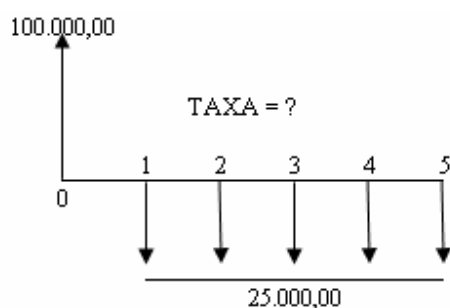
Período	Prestação	Juro pago	Amortização	Saldo devedor
0				100.000,00
1	25.000,00	8.333,33	16.666,67	83.333,33
2	25.000,00	6.666,67	18.333,33	65.000,00
3	25.000,00	5.000,00	20.000,00	45.000,00
4	25.000,00	3.333,33	21.666,67	23.333,33
5	25.000,00	1.666,67	23.333,33	0,00
<b>Σ</b>	125.000,00	25.000,00	100.000,00	316.666,66

Quadro 51: Método de Gauss – Planilha tradicional  
Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que os juros e os saldos devedores foram obtidos em função do valor da prestação constante e das amortizações. Certamente, por uma questão de simples aritmética, depois de liquidadas todas as prestações o saldo devedor será igual a zero. Entretanto, os juros foram determinados pela diferença entre a prestação constante e o valor das amortizações periódicas, não guardando nenhuma relação com valor do empréstimo único ou cinco empréstimos distintos, causando uma distorção conceitual; porquanto, **para caracterizar a capitalização simples, os juros deveriam ser determinados por meio da incidência da taxa sobre o valor do empréstimo, na data zero.**

Para comprovar tal afirmativa, determine-se a taxa mensal que zera as entradas e saídas do fluxo de caixa do referido empréstimo:

Graficamente, o fluxo de caixa do tomador do empréstimo é assim representado:



#### Capitalização simples

$$100.000,00 = \frac{25.000,00}{(1+i \times 1)} + \frac{25.000,00}{(1+i \times 2)} + \frac{25.000,00}{(1+i \times 3)} + \frac{25.000,00}{(1+i \times 4)} + \frac{25.000,00}{(1+i \times 5)}$$

Determinando-se a taxa mensal do referido fluxo de caixa, por meio do processo de interpolação linear ou utilizando a ferramenta atingir metas do *Microsoft Excel*, como já

demonstrado, obtém-se taxa de juros simples de 8,74% ao mês, diversa da taxa contratada de 10%, comprovando que o empréstimo não foi liquidado no regime de juros simples.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo da taxa a juros simples, e o seu resultado for igual à taxa do empréstimo, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se a taxa obtida for menor que a taxa do empréstimo, esse empréstimo não foi efetivado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

Da mesma forma, cinco prestações mensais e iguais a \$ 25.000,00 não liquidam um empréstimo de \$ 100.000,00, a juros simples de 10% ao mês. Para confirmar tal afirmativa, determine-se o valor presente dessas cinco prestações mensais e constantes:

#### Capitalização simples

$$VP = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 1)} + \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 2)} + \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 3)} + \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 4)} + \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 5)}$$

$$VP = 97.315,18$$

$$VPL = 100.000,00 - 97.315,18 = 2.684,82$$

Como se observa nas equações, as cinco prestações postecipadas mensais e iguais a \$ 25.000,00, quando descapitalizadas (descontadas) a juros simples de 10% ao mês, na data zero, não são equivalentes a \$ 100.000,00, restando saldo a pagar no valor de \$ 2.684,82, ratificando que o empréstimo não foi efetivado no regime de juros simples.

Pode-se afirmar, então, com segurança matemática que, ao se avaliarem fluxos de caixa gerados por sistemas de amortização de empréstimos, por meio do cálculo do valor presente líquido a juros simples, e o seu resultado for igual a zero, esse empréstimo foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples. Entretanto, se o valor presente líquido for positivo, esse empréstimo não foi realizado com a aplicação da taxa no regime de juros simples e sim no regime de juros compostos.

Considerando a questão conceitual, comprovada cientificamente em [4.2.1], o regime de juros simples, diferentemente do regime de juros compostos, não permite pagamento de partes do capital de \$ 100.000,00, por não admitir o fracionamento de prazo. Logo, não há como fazer um

único empréstimo para liquidar em parcelas, constantes ou não. Entretanto, aplicando-se o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem cinco empréstimos individuais, liquidados a termo, cujos montantes seriam iguais a \$ 25.000,00 cada, vencendo-se em um, dois, três, quatro e cinco meses, e a soma de seus valores atuais, na data zero, deve ser igual ao valor do empréstimo:

$$VP_1 = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 1)} \rightarrow 22.727,27 \quad \rightarrow J_1 = 2.727,73$$

$$VP_2 = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 2)} \rightarrow 20.833,33 \quad \rightarrow J_2 = 4.166,67$$

$$VP_3 = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 3)} \rightarrow 19.230,77 \quad \rightarrow J_3 = 5.769,23$$

$$VP_4 = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 4)} \rightarrow 17.857,14 \quad \rightarrow J_4 = 7.142,86$$

$$VP_5 = \frac{25.000,00}{(1+0,10 \times 5)} \rightarrow 16.666,67 \quad \rightarrow J_5 = 8.333,33$$

Como restou comprovado, fazer cinco empréstimos de valores iguais a \$ 22.727,27; \$ 20.833,33; \$ 19.230,77; \$ 17.857,14 e \$ 16.666,67, para liquidação em um, dois, três, quatro e cinco meses, respectivamente, a juros simples de 10% ao mês, é idêntico a efetuar um único empréstimo de \$ 97.315,18, para liquidação em 5 prestações postecipadas mensais e iguais; porquanto, nas duas formas, a liquidação ocorrerá em cinco pagamentos mensais e iguais a \$ 25.000,00, no regime de juros simples, ratificando que o Método de Gauss não se realiza no regime de capitalização simples.

Retomando o que se comprovou cientificamente no item 4.3.1.1 - (3), para se liquidar um empréstimo de \$ 100.000,00, a juros simples de 10% ao mês, as cinco prestações mensais e constantes deveriam ser iguais a \$ 25.689,72, que também liquidariam cinco empréstimos individuais de \$ 23.354,29; \$ 21.408,10; \$ 19.761,33; \$ 18.349,80; \$ 17.126,48; \$, respectivamente em um, dois, três, quatro e cinco meses.

Como se verificou no modelo-padrão, o valor da prestação constante obtida por meio do Método de Gauss [XLIII] não coincide com o valor da prestação obtida pela equivalência em juros simples [XXXII], ratificando que o Método não se realiza no regime de juros simples:



**MÉTODO DE GAUSS****EQUIVALÊNCIA**

$$\frac{2VP \times (1+i n)}{[2 + (n-1) \times i] \times n} \neq VP \div \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i t)}$$

Como comprovado cientificamente no item 4.2.1 - equivalência no regime de capitalização simples, a equivalência deve ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como data focal; porquanto, nesse regime de capitalização, os juros vencem a termo, não sendo admissível fracionar o prazo da aplicação ou empréstimo, ou seja, o total de juros e o capital inicial têm que ser resgatados ou liquidados em uma única vez, caracterizando uma única operação.

Algebricamente, pode-se verificar a aplicação de tal conceito ao proceder a equivalência no Método de Gauss, que tem como característica utilizar a data final da série como focal:

$$VF_5 = PGTO_1 \times (1+i \times 4) + PGTO_2 \times (1+i \times 3) + \dots + PGTO_5 \times (1+i \times 0)$$

Considerando-se os valores dos cinco empréstimos, ou seja, os valores das prestações constantes, na data zero, resguardando o conceito de que a taxa de juros deve incidir sobre o valor do empréstimo, tem-se:

$$PGTO_1 = V_1 \times (1+i \times 1)$$

$$PGTO_2 = V_2 \times (1+i \times 2) \dots \dots$$

$$PGTO_5 = V_5 \times (1+i \times 5)$$

Fazendo-se as devidas substituições das prestações na equação do valor futuro, obtém-se a seguinte equação de valor:

$$VF_5 = V_1 (1+i \times 1) \times (1+i \times 4) + V_2 (1+i \times 2) \times (1+i \times 3) + \dots + V_5 (1+i \times 5) \times (1+i \times 0)$$

$$VF_5 = V_1 (4i^2 + 5i + 1) + V_2 (6i^2 + 5i + 1) + \dots + V_5 (1 + 5i)$$

$$VF_5 = 22.727,27 \times 1,54 + 20.833,33 \times 1,56 + \dots + 17.857,14 + 1,54 + 16.666,67 \times 1,50$$

$$VF_5 = 150.000,00$$

A capitalização composta resulta caracterizada, devido ao surgimento de  $i^2$ , proveniente da incidência de juros sobre os juros existentes nas prestações. Atente-se que, ao se proceder à equivalência na data focal cinco, está se calculando juros sobre valores que já contêm juro, descaracterizando a capitalização simples, cuja incidência da taxa se dá sobre o capital inicial.

Logo, conclui-se que somente não caracterizará juro sobre juro quando a taxa incidir sobre um capital na data zero, única data em que um valor não contém juros; porquanto, em qualquer outra data haverá juro embutido, da data zero até essa outra data, validando o fundamento do valor do dinheiro no tempo (teoria da preferência pela liquidez). Como sobejamente demonstrado, para proceder à equivalência financeira entre valores, no regime de juros simples, tem que ser adotada a data zero como focal; porquanto, definida qualquer outra data, caracterizará a incidência da taxa de juros sobre um valor que contém juro, como restou comprovado cientificamente.

Para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, decompõe-se o saldo devedor, por meio da elaboração de planilhas nos sistemas de amortização - Método de Gauss, determinando os respectivos juros e demais componentes dos sistemas de amortização, período a período, para caracterizar o regime de capitalização em que se realiza.

A referida planilha está apresentada no Quadro 52, com o juro do período sendo o resultado da incidência da taxa de juros simples sobre o valor presente de cada um dos cinco empréstimos, e a prestação contém juros e amortização. Quando se utiliza o fluxo de caixa descontado para se obter o valor das prestações, o saldo devedor não se constitui na diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, e sim na diferença entre o valor presente das prestações constantes vincendas e as amortizações havidas, capitalizando de forma simples, até à data em que se pretende determinar o saldo devedor:

EMPRÉSTIMO AMORTIZAÇÃO	VALOR DOS JUROS SIMPLES PERIÓDICOS					PAGAMENTOS		SALDO DEVEDOR	
	1	2	3	4	5	Σ JUROS	PARCELA		
0								97.315,18	
1	22.727,27	2.272,73				2.272,73	25.000,00	82.046,70	
2	20.833,33	2.083,33	2.083,33			4.166,67	25.000,00	64.505,49	
3	19.230,77	1.923,08	1.923,08	1.923,08		5.769,23	25.000,00	44.880,95	
4	17.857,14	1.785,71	1.785,71	1.785,71	1.785,71	7.142,86	25.000,00	23.333,33	
5	16.666,67	1.666,67	1.666,67	1.666,67	1.666,67	8.333,33	25.000,00	0,00	
Σ	97.315,18	9.731,52	7.458,79	5.375,46	3.452,38	1.666,67	27.684,82	125.000,00	312.081,65

Quadro 52: Método de Gauss – Decomposição periódica do saldo devedor de empréstimos distintos (simples)

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa no Quadro 52, a diferença entre o valor da prestação, montante de cada empréstimo, e o respectivo valor presente, é o juro simples do período, demonstrado no referido quadro, periodicamente. Os juros são constantes em cada período, em razão da taxa de juros incidir sempre sobre a mesma base, na data zero, igual ao valor do empréstimo, caracterizando o regime simples de capitalização. Os saldos devedores são construídos pela soma dos valores dos empréstimos e respectivos juros até o período em que se quer determiná-los. A soma dos valores presentes (amortização) das cinco prestações mensais e iguais a \$ 25.000,00 são equivalentes ao valor de um único empréstimo de \$ 97.315,18, significando concluir que não liquidam integralmente o empréstimo de \$ 100.000,00.

Ao decompor os saldos devedores após o pagamento de cada prestação ou empréstimo fica evidenciado que esses saldos devedores são constituídos por parcelas de capital e juros simples. Entretanto, como ficou caracterizado, a taxa não incide sobre esses saldos devedores e sim sobre o valor de cada empréstimo, demonstrando cientificamente que o sistema de prestações constantes – Método de Gauss não se realiza na capitalização simples; porquanto, não liquida o valor do empréstimo, restando um saldo a pagar de \$ 2.684,82, na data zero, representando \$ 4.027,23 no vencimento do empréstimo.

Portanto, ratificando, no regime de capitalização simples é conceitualmente incorreto proceder à equivalência em data diversa da data zero, no caso do Método de Gauss na data cinco, em que se comprovou matematicamente que o valor do empréstimo não foi remunerado de forma equânime ao montante das parcelas, além de o regime de juros simples ter sido descaracterizado, em razão da incidência da taxa sobre valores que contêm juros.

Finalizando, conclui-se que o **Método de Gauss não exprime consistência científica, ao não cumprir condição fundamental de um sistema de amortização: liquidar integralmente o valor do empréstimo**, beneficiando financeiramente o devedor ou penalizando o credor; sendo, portanto, desaconselhável a sua utilização como sistema de amortização.

Encerra-se aqui a análise dos sistemas de amortização, em que se constatou, em nível conceitual e prático, a complexidade dos juros simples e a simplicidade dos juros compostos. O próximo capítulo desenvolve análises para determinar os efeitos dos regimes de capitalização simples e composta nos sistemas de amortização estudados.

## 7. EFEITOS DA CAPITALIZAÇÃO DE JUROS

Caracterizados os regimes de capitalização que se realizam em cada sistema de amortização, desenvolvem-se as análises para determinação dos impactos patrimoniais e financeiros para os tomadores de empréstimos.

### 7.1 A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS E O IMPACTO PATRIMONIAL

A efetivação de empréstimos pressupõe a cobrança de juros, em razão de um duplo objetivo: remunerar o credor pela privação do uso de seu capital e compensar o risco pela possibilidade de não liquidação. Para a obtenção do valor da liquidação do empréstimo, montante único ou pagamentos periódicos, pode ser utilizado o regime de capitalização em juros simples ou em juros compostos, o que impactará na mensuração das obrigações e direitos das partes envolvidas, conseqüentemente, no patrimônio.

Um empréstimo envolve duas partes: credor (mutuante) que fornece o recurso, contabilizando como direitos a receber, e devedor (mutuário) que se utiliza desse recurso em sua estrutura patrimonial, registrando como obrigações a pagar. Há um fenômeno patrimonial, com esse fato contábil afetando diretamente a riqueza (patrimônio).

Normalmente, esses empréstimos são representados por contratos, em que se estabelecem obrigações recíprocas às partes e definem-se o objeto, as responsabilidades, os juros, a forma de pagamento, a periodicidade, as garantias, e outras. Como esses contratos expressam as condições negociadas, espera-se destacada a forma de capitalização dos juros, de modo a permitir a mensuração e registro do impacto patrimonial no fluxo de caixa do mutuante e do mutuário.

O patrimônio, quantitativamente, é considerado como um fundo de valores, que agrega seus vários componentes em três elementos básicos da equação patrimonial, avaliados monetariamente: ativo – passivo = saldo patrimonial. As variações patrimoniais representam o conjunto de fatos modificativos do patrimônio e são operações que propiciam aumento ou diminuição nos componentes do ativo ou do passivo. Essas operações afetam o resultado patrimonial, por meio das variações ativas e passivas, que proporcionam aumento ou diminuição do saldo patrimonial, respectivamente.

Com o objetivo de determinar o valor do impacto causado pela adoção de diferentes regimes de capitalização de juros, adotou-se caso real de uma pessoa jurídica de direito privado,

que financiou 80% de um imóvel no valor de R\$ 270.000,00, para serem liquidados em 15 anos, via conglomerado financeiro privado, que cobra juros prefixados de 13,56% ao ano, capitalizados mensalmente. O valor do financiamento foi de R\$ 216.000,00, para serem liquidados por meio do Sistema de Amortização Francês – Tabela Price, a juros efetivos e prefixados de 1,13% ao mês, em 180 prestações mensais e iguais no valor de R\$ 2.812,99, sem atualização monetária, representando um total de desembolsos de R\$ 506.338,59.

Considerando que os depósitos de poupança, principal *funding* do SFH, são remunerados à taxa real pós-fixada de 6,168% ao ano (0,5% ao mês), além da variação da TR, pode-se concluir que a taxa efetiva (prefixada) cobrada nesse financiamento, 14,44% ao ano, está embutindo uma expectativa anual de variação da TR de 7,79%, praticamente cinco vezes a taxa média anual ocorrida em 2007, igual a 1,60%.

Para analisar o impacto patrimonial e o benefício fiscal, adotou-se a possibilidade desse financiamento ser efetivado não somente por meio do Sistema Price, mas também dos outros sistemas estudados: SAC, SAM, SACRE e SAA. Para tal, foram elaboradas quinze planilhas de amortização, sendo cinco na forma original de cada sistema, cinco nos sistemas com base na equivalência em juros compostos e cinco nos sistemas com base na equivalência em juros simples, considerando o valor do dinheiro no tempo e a principal característica de cada sistema: Price – prestação constante; SAC – amortização constante; SAM – média da prestação do Price e do SAC; SACRE – prestação do SAC; e SAA prestação constante (juro). As referidas planilhas encontram-se nos apêndices de 1 a 15.

A consolidação dos elementos essenciais para determinação do impacto patrimonial (contábil) e fiscal (financeiro), gerando variação no benefício fiscal para o tomador do empréstimo, encontra-se no Quadro 53. As variações patrimoniais que representam o conjunto dos fatos modificativos, aumentando o patrimônio do credor e diminuindo do devedor, em nível contábil e financeiro<sup>9</sup>, estão representados no Quadro 54.

---

<sup>9</sup> Entenda-se contábil o valor histórico e financeiro o valor histórico considerando o fluxo de caixa descontado.

PLANILHAS		PAGAMENTO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	
TABELA PRICE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	506.338,59	290.338,59	216.000,00
		VP	216.000,00	149.753,99	66.246,01
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	506.338,59	290.338,59	216.000,00
		VP	216.000,00	94.397,38	121.602,62
Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	397.199,69	181.199,69	216.000,00	
	VP	169.442,22	60.335,33	109.106,88	
SISTEMA SAC	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	436.892,40	220.892,40	216.000,00
		VP	216.000,00	123.856,12	92.143,88
	Equivalência composta AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	704.283,94	488.283,94	216.000,00
		VP	216.000,00	123.856,12	92.143,88
Equivalência simples AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	436.892,40	220.892,40	216.000,00	
	VP	156.749,62	64.605,74	92.143,88	
SISTEMA SAM	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	471.615,49	255.615,49	216.000,00
		VP	216.000,00	136.805,06	79.194,94
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	605.311,27	389.311,27	216.000,00
		VP	216.000,00	109.126,75	106.873,25
Equivalência simples PGTO - VDT	S	417.046,04	201.046,04	216.000,00	
	VP	163.095,92	62.470,54	100.625,38	
SISTEMA SACRE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	429.896,62	213.896,62	216.000,00
		VP	216.000,00	121.381,53	94.618,47
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	429.896,62	213.896,62	216.000,00
		VP	216.000,00	81.437,44	134.562,56
Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	360.565,06	144.565,06	216.000,00	
	VP	181.164,61	56.467,41	124.697,20	
AMERICANO	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	655.344,00	439.344,00	216.000,00
		VP	216.000,00	187.420,64	28.579,36
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	655.344,00	439.344,00	216.000,00
		VP	216.000,00	106.705,46	109.294,54
Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	482.283,51	266.283,69	216.000,00	
	VP	142.173,78	59.608,78	82.565,18	

Quadro 53: Consolidação das planilhas de amortização para determinação dos impactos

Fonte: Elaborado pelo autor

PLANILHAS		PAGAMENTO				
PRICE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	506.338,59	506.338,59	506.338,59	
		VP	216.000,00	216.000,00	216.000,00	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	506.338,59	506.338,59		506.338,59
		VP	216.000,00	216.000,00		216.000,00
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	397.199,69		397.199,69	397.199,69
		VP	169.442,22		169.442,22	169.442,22
IMPACTO PATRIMONIAL		CONTÁBIL		0,00	109.138,90	109.138,90
		FINANCEIRO		0,00	46.557,78	46.557,78
SISTEMA SAC	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	436.892,40	436.892,40	436.892,40	
		VP	216.000,00	216.000,00	216.000,00	
	Equivalência composta AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	704.283,94	704.283,94		704.283,94
		VP	216.000,00	216.000,00		216.000,00
	Equivalência simples AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	436.892,40		436.892,40	436.892,40
		VP	156.749,62		156.749,62	156.749,62
IMPACTO PATRIMONIAL		CONTÁBIL		267.391,54	0,00	267.391,54
		FINANCEIRO		0,00	59.250,38	59.250,38
SISTEMA SAM	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	471.615,49	471.615,49	471.615,49	
		VP	216.000,00	216.000,00	216.000,00	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	605.311,27	605.311,27		605.311,27
		VP	216.000,00	216.000,00		216.000,00
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	417.046,04		417.046,04	417.046,04
		VP	163.095,92		163.095,92	163.095,92
IMPACTO PATRIMONIAL		CONTÁBIL		133.695,77	54.569,45	188.265,22
		FINANCEIRO		0,00	52.904,08	52.904,08
SACRE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	429.896,62	429.896,62	429.896,62	
		VP	216.000,00	216.000,00	216.000,00	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	429.896,62	429.896,62		429.896,62
		VP	216.000,00	216.000,00		216.000,00
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	360.565,06		360.565,06	360.565,06
		VP	181.164,61		181.164,61	181.164,61
IMPACTO PATRIMONIAL		CONTÁBIL		0,00	69.331,56	69.331,56
		FINANCEIRO		0,00	34.835,39	34.835,39
AMERICANO	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	655.344,00	655.344,00	655.344,00	
		VP	216.000,00	216.000,00	216.000,00	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	655.344,00	655.344,00		655.344,00
		VP	216.000,00	216.000,00		216.000,00
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	482.283,51		482.283,51	482.283,51
		VP	142.173,78		142.173,78	142.173,78
IMPACTO PATRIMONIAL		CONTÁBIL		0,00	173.060,49	173.060,49
		FINANCEIRO		0,00	73.826,22	73.826,22

Quadro 54: Impacto patrimonial contábil e financeiro

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa nos Apêndices 1 e 2, o valor dos pagamentos da Tabela Price e do sistema com base na equivalência em juros compostos, são os mesmos, no valor de R\$ 2.812,99, produzindo um total desembolsado (valor histórico) de R\$ 506.338,59, não originando diferença patrimonial, embora resulte em juros e amortizações iguais, porém de forma invertida. Entretanto, quando se compara com o sistema com base na equivalência em juros simples, conforme o Apêndice 3, o valor das prestações decresce para R\$ 2.206,66, com um total desembolsado de R\$ 397.199,69, representando uma diferença contábil no patrimônio no valor de R\$ 109.138,90, praticamente a metade do valor do financiamento, conforme se constata no Quadro 54.

Quando se aplica o conceito de fluxo de caixa descontado, o valor presente do fluxo de pagamentos na Tabela Price e no sistema com base na equivalência em juros compostos é exatamente o mesmo: R\$ 216.000,00, não ocasionando diferença no patrimônio do tomador do empréstimo. Todavia, ao comparar com o valor presente produzido pelo sistema em capitalização simples R\$ 169.442,22, constata-se uma diferença financeira patrimonial no valor de R\$ 46.557,78, representando uma queda de 22%, conforme Quadro 54.

Essa análise foi estendida aos demais sistemas estudados e os resultados constam do mesmo quadro, onde se verificam os impactos patrimoniais na forma contábil e financeira, quando se comparam os sistemas na forma original, na equivalência em juros simples e na equivalência em juros compostos, considerando o valor do dinheiro no tempo.

Destaque-se nos resultados obtidos, o total desembolsado de R\$ 704.283,94 pelo sistema em capitalização composta, quando se mantém o valor da amortização do SAC constante, contra um total desembolsado pelo SAC tradicional e pelo sistema em capitalização simples no valor de R\$ 436.892,40, produzindo um impacto contábil de R\$ 267.391,54, superior em 24% ao valor do empréstimo.

Da mesma forma, destaque-se o valor presente do fluxo de pagamentos no valor de R\$ 142.173,78, ao se considerar a equivalência em capitalização simples, em comparação com o Sistema Americano e a equivalência em capitalização composta, que produzem valores presentes iguais a R\$ 216.000,00, gerando um impacto financeiro no patrimônio no valor de R\$ 73.826,22, correspondentes a 34% do valor do empréstimo.



## 7.2 A CAPITALIZAÇÃO DE JUROS E O REFLEXO NO BENEFÍCIO FISCAL

De modo geral, os empréstimos de médio e longo prazo são apresentados em planilhas, em que se visualizam os componentes de um sistema de amortização, indicando em cada pagamento, a parte que se destina aos juros e à amortização do principal da dívida. Tal separação decorre do fato de o tratamento contábil ser diferenciado, uma vez que os juros têm um efeito fiscal, porquanto a empresa tomadora do financiamento contabiliza os juros como despesa dedutível a cada ano, influenciando diretamente no processo de determinação do valor-base de cálculo do Imposto de Renda e da Contribuição Social sobre o lucro.

Os sistemas de amortização de empréstimos estudados têm como característica determinar os juros periodicamente por meio da incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior, exceto o sistema em capitalização simples, e como comprovado matematicamente no item 4.3.1 – Tabela Price, o saldo devedor de um período qualquer independe do valor do juro e da amortização. Isso quer dizer que o juro e a amortização a serem contabilizados periodicamente podem tomar valores diversos, desde que a sua soma seja igual ao valor da prestação do período e o total das amortizações seja igual ao valor do empréstimo; pois, não altera o valor do fluxo de pagamentos e dos saldos devedores. Entretanto, conceitualmente, os valores dos juros e da amortização devem ser obtidos por meio de equivalência, considerando o valor do dinheiro no tempo, conforme comprovados matematicamente nos sistemas de amortização estudados.

Esse fato faz com que os juros calculados pelo sistema Price e pelo sistema com base na equivalência em capitalização composta sejam os mesmos, porém de forma invertida, proporcionando o mesmo valor-base em termos contábeis, com os efeitos fiscais sendo anulados no decorrer dos períodos. Entretanto, quando se aplica o conceito de fluxo de caixa descontado, o valor presente do fluxo dos juros na Tabela Price é superior ao produzido pelo sistema com base na equivalência em capitalização composta, aumentando quando se compara com o sistema com base na equivalência em capitalização simples, proporcionando, com isso, uma diminuição no benefício fiscal do tomador do empréstimo.

Com o objetivo de verificar essa diferença entre os valores-base para o cálculo do valor presente do fluxo dos juros gerados pela Tabela Price, pelo sistema em capitalização composta e simples, foram construídos os Apêndices 1, 2 e 3, além de consolidar os pagamentos, juros e amortização no Quadro 53 e especificamente os juros no Quadro 55, como se demonstra:

PLANILHAS		JUROS				
PRICE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	290.338,59	290.338,59	290.338,59	
		VP	149.753,99	149.753,99	149.753,99	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	90.338,59	290.338,59		290.338,59
		VP	94.397,38	94.397,38		94.397,38
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	181.199,69		181.199,69	181.199,69
		VP	60.335,33		60.335,33	60.335,33
VALOR-BASE PARA O BENEFÍCIO FISCAL		CONTÁBIL		0,00	109.138,90	109.138,90
		FINANCEIRO		55.356,61	89.418,66	34.062,04
SISTEMA SAC	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	220.892,40	220.892,40	220.892,40	
		VP	123.856,12	123.856,12	123.856,12	
	Equivalência composta AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	488.283,94	488.283,94		488.283,94
		VP	123.856,12	123.856,12		123.856,12
	Equivalência simples AMORTIZAÇÃO - VDT	$\Sigma$	220.892,40		220.892,40	220.892,40
		VP	64.605,74		64.605,74	64.605,74
VALOR-BASE PARA O BENEFÍCIO FISCAL		CONTÁBIL		267.391,54	0,00	267.391,54
		FINANCEIRO		0,00	59.250,38	59.250,38
SISTEMA SAM	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	255.615,49	255.615,49	255.615,49	
		VP	136.805,06	136.805,06	136.805,06	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	389.311,27	389.311,27		389.311,27
		VP	109.126,75	109.126,75		109.126,75
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	201.046,04		201.046,04	201.046,04
		VP	62.470,54		62.470,54	62.470,54
VALOR-BASE PARA O BENEFÍCIO FISCAL		CONTÁBIL		133.695,77	54.569,45	188.265,22
		FINANCEIRO		27.678,31	74.334,52	46.656,21
SACRE	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	213.896,62	213.896,62	213.896,62	
		VP	121.381,53	121.381,53	121.381,53	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	213.896,62	213.896,62		213.896,62
		VP	81.437,44	81.437,44		81.437,44
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	144.565,06		144.565,06	144.565,06
		VP	56.467,41		56.467,41	56.467,41
VALOR-BASE PARA O BENEFÍCIO FISCAL		CONTÁBIL		0,00	69.331,56	69.331,56
		FINANCEIRO		39.944,08	64.914,11	24.970,03
AMERICANO	Tradicional (Normal)	$\Sigma$	439.344,00	439.344,00	439.344,00	
		VP	187.420,64	187.420,64	187.420,64	
	Equivalência composta PGTO - VDT	$\Sigma$	439.344,00	439.344,00		439.344,00
		VP	106.705,46	106.705,46		106.705,46
	Equivalência simples PGTO - VDT	$\Sigma$	266.283,69		266.283,69	266.283,69
		VP	59.608,78		59.608,78	59.608,78
VALOR-BASE PARA O BENEFÍCIO FISCAL		CONTÁBIL		0,00	173.060,31	173.060,31
		FINANCEIRO		80.715,19	127.811,86	47.096,68

Quadro 55: Valor-base para cálculo do impacto no benefício fiscal contábil e financeiro

Fonte: Elaborado pelo autor

Como se observa nos Apêndices 1 e 2, o valor dos juros da Tabela Price e do sistema com base na equivalência em juros compostos, são os mesmos, porém de forma invertida, com um total desembolsado (valor histórico) de R\$ 290.338,50, não originando diferença no valor-base para o cálculo do benefício fiscal. Entretanto, quando se compara com o sistema com base na equivalência em capitalização simples, conforme o Apêndice 3, o valor dos juros decresce significativamente, com um total desembolsado de R\$ 181.199,69, representando uma diferença contábil, no valor-base para o cálculo do benefício fiscal de R\$ 109.138,90, conforme se constata no Quadro 55. Ao se considerar uma taxa de 35% sobre o lucro para o cálculo do imposto de renda e contribuição social, o valor do benefício fiscal fica reduzido de R\$ 101.618,48 para R\$ 63.419,89, uma redução de R\$ 38.198,61, representando praticamente 18% do valor do empréstimo.

Quando se aplica o conceito de fluxo de caixa descontado, o valor presente do fluxo de juros na Tabela Price, valor-base para o cálculo do benefício fiscal financeiro, conforme Quadro 55, atinge R\$ 149.753,99, contra R\$ 94.397,38 para o sistema com base na equivalência em capitalização composta e R\$ 60.335,33 no sistema com base na equivalência em juros simples, diminuindo o benefício fiscal de R\$ 52.413,90 para R\$ 33.039,08 e R\$ 18.344,87, respectivamente. Portanto, constata-se o paradoxo: quanto mais se paga de juros, maior o benefício fiscal. Foge do escopo dessa dissertação a discussão de alavancagem financeira.

Essa análise foi estendida aos demais sistemas estudados e os resultados constam do Quadro 55, onde se verificam as diferenças dos valores-base para o cálculo do benefício fiscal na forma contábil e financeira. A comparação se concretiza nos sistemas de amortização na forma tradicional, na equivalência em capitalização composta e na equivalência em capitalização simples, considerando o valor do dinheiro no tempo.

Destaque-se nos resultados obtidos, o total desembolsado de juros no valor de R\$ 488.283,94 pelo sistema com base na equivalência em capitalização composta, quando se mantém o valor da amortização do SAC constante e o valor da prestação determinado por meio da equivalência em capitalização composta, considerando o valor do dinheiro no tempo, contra um total desembolsado pelo SAC na forma tradicional e pelo sistema com base na equivalência em capitalização simples no total de R\$ 220.892,40, produzindo um aumento de R\$ 267.391,54 no valor-base e de R\$ 93.587,04 no benefício fiscal, representando 124% e 43% do valor do empréstimo, respectivamente.

Outro destaque é o valor presente do fluxo de pagamentos dos juros ao se considerar o Sistema Americano na forma tradicional e pela equivalência em capitalização composta: R\$ 439.344,00, em comparação com o sistema em capitalização simples: R\$ 266.283,69, produzindo uma diferença de R\$ 173.060,31 no valor-base para o cálculo do benefício fiscal contábil, representando 80% do valor do empréstimo.

Quando se aplica o conceito de fluxo de caixa descontado, o valor presente do fluxo de juros no Sistema Americano, valor-base para o cálculo do benefício fiscal financeiro, conforme Quadro 55, atinge R\$ 187.420,64, contra R\$ 106.705,46 para o sistema em equivalência com capitalização composta e R\$ 59.608,78 para o sistema com equivalência em capitalização simples, alterando o benefício fiscal financeiro de R\$ 65.597,22 para R\$ 37.346,91 e R\$ 20.863,07, respectivamente. Portanto, constata-se o paradoxo: quanto mais se paga de juros, maior o benefício fiscal. Foge do escopo dessa dissertação a discussão de alavancagem financeira.

Podem ser realizadas diversas análises; no entanto, como a lógica matemática e a rotina são as mesmas, deixa-se a cargo do leitor outras comparações com base nas planilhas apresentadas.

## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Ao se propor a esclarecer a polêmica em relação à capitalização dos juros nos diferentes sistemas de amortização, se simples ou composta, a pesquisa dessa dissertação visa a contribuir para aprofundar o estudo do tema à luz da metodologia de pesquisa científica e a atender o interesse público. Estão apresentados e analisados de forma sistemática os raciocínios matemáticos inerentes às relações contratuais, aos resultados dos impactos contábeis e benefícios fiscais, e seus reflexos sobre o patrimônio. A relevância do estudo se magnifica em face das elevadas taxas de juros praticadas no Brasil.

A revisão teórica apresentou três grupos de conceitos: os regimes de capitalização de juros e a equivalência de capitais, em base conceitual e algébrica; os aspectos legais relacionados, resgatados de forma a esclarecer como a legislação brasileira regulamenta a cobrança de juros, e os aspectos contábeis, sumarizados para evidenciar como os montantes, parcelas, juros e amortizações são registrados e têm maior ou menor poder de evidenciação das variações de patrimônio. Esse tripé conceitual foi relevante para embasar o raciocínio matemático desenvolvido ao longo da exploração do papel dos juros em cada um dos sistemas de amortização estudados e responder a questão de pesquisa:

**Quais os impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos, resultantes dos sistemas de amortização, ao se adotar o regime de capitalização de juros simples ou composto?**

Ao iniciar a revisão teórica e proceder à fundamentação conceitual da dissertação foram identificadas cinco relevantes constatações:

A primeira constatação dessa dissertação é a não uniformidade na conceituação de capitalização simples. Identificou-se na literatura equívocos conceituais em afirmar que os juros simples, porque calculados sobre o mesmo valor, são sempre iguais e é indiferente pagar-se periodicamente ou no final do período, ignorando o valor do dinheiro no tempo, a exemplo de Cavalheiro (1992, p. 6); Francisco (1985, p. 12); Kuhnen (2006, p. 3) e Veras (1991, p. 60).

Esses equívocos conceituais foram contestados matematicamente, porque os juros simples vencem a termo, exigindo um único período de capitalização, não admitindo, portanto, saques ou pagamentos parciais, ou seja, o surgimento de capital remanescente; pois, caso houvesse, a taxa de juros incidiria sobre valores em datas posteriores à data zero, descaracterizando a capitalização

simples. Os juros simples, por vencerem a termo, não permitem o fracionamento de prazo, característica exclusiva da capitalização composta, a qual exige mais de um período de capitalização para caracterizar-se. Os juros simples são calculados sempre sobre o capital inicial, data zero, não havendo, entretanto, impedimento que se calcule periodicamente, desde que o resgate ou pagamento seja único, caracterizando uma única operação.

A segunda constatação dessa dissertação é a uniformidade na conceituação de juros compostos, ou seja, não há divergência de conceitos entre os autores, na forma clássica. Entretanto, ao elucidar o conceito de anatocismo, comprovou-se matematicamente que a caracterização do regime de juros compostos se configura pela incidência da taxa sobre juros vencidos e não pagos, uma vez que os juros existentes nos saldos são juros passados, a exemplo de Assaf Neto (2001, p. 190); Faro (1989, p. 106); Francisco (1985, p. 81); Mathias e Gomes (2002, p. 180); Puccini (2006, p. 152); Rezende, (2003, p. 23) e Vieira Sobrinho (1998, p. 111 e 2004, p. 2), bem como os dicionários citados.

A terceira constatação é que a literatura tem conceituado esses dois regimes apenas de forma clássica, calculando os juros periodicamente, mas com um único resgate ou pagamento, para caracterizar o crescimento linear e exponencial, e explicitar a diferença entre os regimes. Isso dificulta o entendimento da capitalização composta quando envolve saque/pagamento igual ou superior ao juro do período, na aplicação ou empréstimo, porquanto a taxa incide sobre valor igual ou inferior ao capital inicial, passando a ilusão de que os juros teriam sido totalmente sacados ou pagos, no final de cada período, a exemplo de Brealey e Myers (1998, p. 41); Casarotto Filho e Kopittke (1996, p. 19), Puccini (2006, p. 15) e Araújo (1993, p. 50).

Além disso, afirma-se que não é possível ocorrer a capitalização composta de juros na amortização de empréstimos, pelo fato de o saldo devedor diminuir a cada pagamento, quando no processo de capitalização o saldo aumenta com a incorporação dos juros, a exemplo de Penna (2007, p. 95-96) e Rezende (2003, p. 25-27).

Para comprovar matematicamente esse entendimento parcial foram desenvolvidos exemplos práticos com alternativas que incluem diversos depósitos ou liberações e saques ou pagamentos, caracterizando, algébrica e matematicamente, os dois tipos de regimes. Demonstrou-se, então, que o processo de capitalização dos juros se realiza tanto na aplicação, como no empréstimo de dinheiro, ratificando que não são incompatíveis, e sim, convergentes.

Para isso, deduziu-se fórmula genérica de juros compostos, contemplando as movimentações financeiras, as quais envolvem aplicações (depósitos e saques) e amortizações (liberações e pagamentos). Os resultados permitiram concluir que os saques e pagamentos, bem como os saldos remanescentes, são efetivamente montantes, e que se configuram como juros apenas quando há resgate total da aplicação ou liquidação total do empréstimo.

A penúltima constatação foi identificada com relação à equivalência de capitais diferidos no regime de juros simples. A literatura tem observado de forma correta a não cindibilidade de prazo; porém, conclui de forma equivocada, ao assegurar que, em razão da obtenção de valores diferentes em cada data focal, essa data deve ser definida entre as partes, afirmando, inclusive, que não há posicionamento técnico definitivo da Matemática Financeira, a exemplo de Assaf Neto (2001, p. 31); Faro (2002, p. 29), Mathias e Gomes (1984, p. 94) e Neves (1982, p. 34).

Esse equívoco conceitual foi contestado por meio de comprovação matemática, em que se demonstrou que a equivalência em juros simples deve ser realizada obrigatoriamente na data focal zero, única data que um valor não contém juro; porquanto, qualquer outra data posterior que se proceda à equivalência, a taxa de juros incidirá sobre valor que contém juros (montante), descaracterizando a capitalização simples.

A última constatação foi identificada com relação aos sistemas de amortização de empréstimos, em que os autores divergem quanto ao regime de capitalização dos juros. O valor do pagamento igual ou superior ao valor dos juros devidos é o principal argumento utilizado para sustentar que a capitalização nesses sistemas de amortização é simples; pois, segundo esses autores, o valor da prestação liquida totalmente os juros e com a sobra, amortiza o valor da dívida, não restando juros no saldo devedor, base do cálculo dos juros nos próximos períodos, a exemplo de Branco (2002, p. 159 e 167), Lapponi (2006, p. 427 e 430); Mathias e Gomes (2002, p. 307); Penna (2007, p. 146); Pires e Negra (2005, p. 44); Rezende (2003, p.146) e Vieira Sobrinho (2006, p. 1-4).

Esse raciocínio inicial fundamentou a continuidade da investigação e permitiu atingir o objetivo geral da dissertação:

- **Determinar os impactos financeiros e patrimoniais no fluxo de caixa dos tomadores de empréstimos, e caracterizar qual regime de capitalização de juros, simples ou composto, é utilizado nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.**

Considerando as características dos sistemas de amortização usuais na realidade brasileira, notadamente o fato de a taxa de juros incidir sobre os saldos devedores, ficou constatado teórica e cientificamente que esses saldos contêm juros vencidos e não pagos, caracterizando o regime composto de capitalização. Em cada sistema também foram desenvolvidos cálculos e respectivas planilhas com base na equivalência financeira no regime de capitalização simples, confirmando que os referidos sistemas não se realizam nesse regime. Além disso, ratificando essa constatação, as fórmulas para obtenção das prestações, dos valores presentes líquidos e das taxas efetivas nesses sistemas coincidem com as obtidas por meio do sistema com base na equivalência no regime de capitalização composta. As referidas comprovações científicas estão desenvolvidas no decorrer dos capítulos 4, 5 e 6.

O fato de os sistemas de amortização estudados se desenvolverem no regime de capitalização composta, contrariamente à legislação brasileira vigente, influencia diretamente o valor do patrimônio dos tomadores de empréstimos. O valor desse impacto nos sistemas estudados, na forma contábil e financeira, foi determinado no decorrer do capítulo 7, notadamente no item 7.1.

A incidência da taxa de juros sobre o saldo devedor, característica que envolve os sistemas de amortização em geral, resulta em juros de forma invertida aos juros calculados por meio da utilização do fluxo de caixa descontado, forma conceitualmente adequada, influenciando diretamente no valor-base para o cálculo do benefício fiscal dos tomadores de empréstimos. O valor desse impacto nos sistemas estudados, na forma contábil e financeira, foi determinado no decorrer do capítulo 7, notadamente no item 7.1.

Os objetivos específicos foram atingidos na forma explicitada a seguir:

- **Demonstrar a equivalência de capitais e de fluxos de caixa na capitalização simples e composta;**

No capítulo 4 foi demonstrada a equivalência de capitais diferidos e de fluxos de caixa na capitalização simples e composta. No item 4.1.1 foi cientificamente demonstrado que na capitalização simples a equivalência deve ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como data focal, em razão da não cindibilidade de prazo. Os diferentes valores de prestação obtidos com a alteração da data focal nesse regime caracterizam a comprovação matemática. No



item 4.1.2, a capitalização composta, de forma diversa, comprova a equivalência de capitais independentemente da data focal adotada, em razão da cindibilidade de prazo, característica desse regime.

Da mesma forma, o cálculo do valor presente líquido e da taxa efetiva nos sistemas de amortização estudados, conforme comprovação científica demonstrada nos itens 5.1.1, 5.2.1 e 6.3.1, bem caracteriza a equivalência em capitalização composta e não se confirma a capitalização simples nos sistemas de amortização estudados.

- **Demonstrar que os sistemas de amortização e de capitalização são convergentes.**

No item 4.2.3 obteve-se a fórmula genérica de juros compostos quando envolve liberações e pagamentos - EMPRÉSTIMO DE DINHEIRO (amortização) e no item 4.2.4 a fórmula genérica de juros compostos quando envolve depósitos e saques - APLICAÇÃO DE DINHEIRO (capitalização). Ao constatar que as fórmulas para obtenção do saldo (credor e devedor) na aplicação e no empréstimo são idênticas, pôde-se comprovar matematicamente que a capitalização e amortização não são incompatíveis e sim convergentes; porquanto a incidência de juros sobre juros ocorre de forma idêntica tanto na APLICAÇÃO como no EMPRÉSTIMO DE DINHEIRO, sobre os saldos credores e devedores.

- **Caracterizar o regime de capitalização e desenvolver as planilhas, em moeda constante, com parcelas periódicas, postecipadas, constantes ou não, nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira.**

No capítulo 5 foram desenvolvidas análises para comprovação dos regimes de capitalização de juros utilizados nos sistemas de amortização mais usuais na realidade brasileira, e no capítulo 6 outros sistemas de uso não habitual. Em cada sistema estudado foram confrontadas as fórmulas para obtenção das prestações e os resultados obtidos no cálculo do valor presente líquido e da taxa de juros, com as fórmulas e os resultados obtidos nos sistemas com base na equivalência no regime de juros compostos e de juros simples, permitindo a conclusão algébrica e matemática em qual regime se processa cada sistema.

Foram realizadas quatro comprovações matemáticas em cada sistema de amortização, confrontando os saldos devedores obtidos nos sistemas com base na equivalência em juros compostos e em juros simples, ratificando, por meio do surgimento do fator de capitalização, que os sistemas se realizam no regime de capitalização composta e, pela incidência da taxa de juros sobre valores em datas diversas da data zero, que não se efetivam no regime de capitalização simples. Como arremate, para evidenciar que os juros vencidos e não pagos são intrínsecos aos saldos devedores, base da incidência da taxa de juros, esses saldos devedores foram decompostos, período a período, para caracterizar os dois regimes de capitalização e defrontar com os respectivos sistemas de amortização.

- **Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos pagamentos em cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no patrimônio dos tomadores de empréstimos.**

No capítulo 7, notadamente no item 7.1, sob o enfoque contábil e financeiro, foi determinado o valor do impacto patrimonial causado pela adoção alternativa dos sistemas no regime de capitalização simples e composta, com base no somatório e no cálculo do valor presente dos pagamentos extraídos das planilhas elaboradas para os sistemas Price, SAC, SAM, SACRE e SAA, conforme apêndices numerados de 1 a 15. Para otimizar a visualização e verificação desses impactos foi construído o Quadro 54 – Impacto patrimonial contábil e financeiro, onde se possibilitam análises e comparações entre os valores totais desembolsados (valor histórico) em cada sistema estudado, bem como o valor dos impactos contábeis (valor histórico) e financeiros (valor do dinheiro no tempo), cotejando com os resultados nos sistemas em capitalização simples e composta.

- **Verificar a diferença entre os fluxos de caixa dos juros de cada sistema de amortização e os fluxos gerados pelas equivalências em capitalização simples e composta, para mensurar os impactos contábeis e financeiros, com reflexos no valor do benefício fiscal dos tomadores de empréstimos.**

No capítulo 7, notadamente no item 7.2, sob o enfoque contábil e financeiro, foi determinado o valor-base para o cálculo do benefício fiscal, causado pela adoção alternativa dos sistemas no regime de capitalização simples e composta, com base no somatório e no cálculo do valor presente dos fluxos de caixa dos juros, extraídos das planilhas elaboradas para os sistemas Price, SAC, SAM, SACRE e SAA, conforme apêndices numerados de 1 a 15. Para otimizar a visualização e verificação desses impactos foi construído o Quadro 55 – Valor-base para cálculo do benefício fiscal contábil e financeiro, onde se possibilitam análises e comparações entre os valores totais pagos a título de juros em cada sistema estudado, bem como o valor do benefício fiscal contábil (valor histórico) e financeiro (valor do dinheiro no tempo), cotejando com os resultados nos sistemas em capitalização simples e composta.

Consideram-se atingidos o objetivo principal e os objetivos secundários dessa dissertação. O trabalho poderia ser mais abrangente se houvesse maior número de publicações acadêmicas discutindo a temática capitalização de juros e sistemas de amortização, e seus reflexos. Entende-se também como limitação do trabalho as divergências conceituais e a falta de estudos sistemáticos sobre os sistemas de amortização de empréstimos sob a ótica contábil e financeira, ainda que realizados pelas partes interessadas, sem rigor metodológico.

Outra limitação do trabalho, que se reveste de incentivo para estudos futuros, é a abordagem legal do tema na realidade brasileira: são tomadas decisões jurídicas controversas quando dos questionamentos sobre capitalização dos juros em sistemas de amortização, embora a matemática financeira, como ciência exata, não admita interpretação diversa.

Finda extenso o presente trabalho porque buscou detalhar a resposta ao problema de pesquisa de forma clara e didática, sem perder o rigor científico. Não se limitou a estudar os impactos em um sistema de amortização e apenas estender a interpretação para os demais; mas desenvolveu o raciocínio matemático para todos os cinco sistemas, sempre elaborando fluxos de caixa no sistema tradicional, no sistema com base na equivalência em juros simples e no sistema com base na equivalência em juros compostos.

Para a continuidade do estudo do tema, duas principais vertentes podem ser seguidas: ampliar os estudos sob a ótica contábil, procurando mensurar empréstimos diferenciados, por exemplo, operações de arrendamento mercantil, e sob a ótica jurídica, procedendo a levantamento das decisões judiciais para identificar se prevalece o entendimento do regime de capitalização simples ou composto nos diferentes sistemas de amortização.

## 9. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Carlos R. V.. **Matemática Financeira**. São: Atlas, 1993.

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas, 2001.

AYRES JR, Frank. **Matemática financeira**. Tradução Gastão Q. de Moura. São Paulo: McGraw-Hill, 1981.

BEUREN, Ilse M.. **Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática**. São Paulo: Atlas, 2003.

BRANCO, Anísio C. C.. **Matemática financeira aplicada**. São Paulo: Thomson, 2002.

BREALEY, Richard A.; MYERS, Stewart C. **Princípios de finanças empresariais**. 5. ed. Tradução Maria do Carmo Figueira. Lisboa: McGraw-Hill, 1998.

BRIGHAM, Eugene F.; EHRHARDT, Michael C.. **Administração financeira: teoria e prática**. São Paulo: Thomson, 2006.

BRIGHAM, Eugene F.; HOUSTON, Joel F.. **Fundamentos da moderna administração financeira**. São Paulo: Campus, 1999.

BRASIL. Lei 556, de 25 de junho de 1850, instituiu o Código Comercial.

BRASIL. Decreto 22.626/33, de 07 de abril de 1933, denominada Lei de Usura.

BRASIL. Súmula da Jurisprudência Predominante do STF – Supremo Tribunal Federal, nº. 121, aprovada em sessão plenária de 13 de dezembro de 1963.

BRASIL. Súmula da Jurisprudência Predominante do STF – Supremo Tribunal Federal, nº. 596, aprovada em sessão plenária de 15 de dezembro de 1976.

BRASIL. Súmula do STJ – Superior Tribunal da Justiça, nº. 93, aprovada na 2ª sessão de 27 de outubro de 1993.

BRASIL. Medida Provisória nº. 1.963-17, reeditada por meio da Medida Provisória nº. 2.170-36, de 23 de agosto de 2001.

BRASIL. Lei nº. 10.406, de 10 de janeiro de 2002, instituiu o Código Civil Brasileiro,

BRASIL. Corte Especial do Tribunal Regional Federal (TRF) - 4ª Região, 04 de agosto de 2004. [http://www.trf4.gov.br/trf4/noticias/noticia\\_final.php?id=4026&PHPSESSID=b3e4205c2770fc83398f2eca2017dcd8](http://www.trf4.gov.br/trf4/noticias/noticia_final.php?id=4026&PHPSESSID=b3e4205c2770fc83398f2eca2017dcd8). Acesso em 12/out/06.

BRASIL. Medida Provisória nº. 321, de 12 de setembro de 2006.

BUFREM, Leilah S.. **Pesquisa em informação**: reflexões sobre o método. Curitiba: LUD, 2000.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITKE, Bruno H.. **Análise de investimentos**: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial. 7 ed. São Paulo: Atlas, 1996.

CAVALHEIRO, Luiz A. F.. **Elementos de matemática financeira**. 12 ed. Rio de Janeiro: Editora da Fundação Getúlio Vargas, 1992.

CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.. **Metodologia científica**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1972.

COLLIS, Jill; HUSSEY, Roger. **Pesquisa em administração**: um guia prático para alunos de graduação e pós-graduação. Tradução Lucia Simoni. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005

CRESWELL, John W.. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 2 ed. São Paulo: Artmed, 2007.

CUNHA, Antonio G. da. **Dicionário Etimológico**. Nova Fronteira, 1997.

DAMODARAN, Aswath. **Finanças corporativas aplicadas**. Tradução Jorge Ritter. Porto Alegre: Bookman, 2002.

DEMO, Pedro. **Metodologia científica em ciências sociais**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1989.

FARIA, Rogério G. de. **Matemática Comercial e Financeira**. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

FARO, Clóvis de. **Matemática financeira**. São Paulo: Atlas, 1989.

\_\_\_\_\_ **Princípios e aplicações do cálculo financeiro**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio: dicionário da língua portuguesa – século XXI**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

\_\_\_\_\_ **Dicionário Aurélio – Século XXI**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2006.

FRANCISCO, Walter de. **Matemática financeira**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 1985.

GIL, Antonio Carlos. **Técnicas de pesquisa em economia**. São Paulo: Atlas, 1991.

\_\_\_\_\_ **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1995.

\_\_\_\_\_ **Pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1999.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José N.. **Matemática financeira**. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

HENDRIKSEN, Eldon S.; BREDÁ, Michael F. Van. **Teoria da contabilidade**. Tradução de Antonio Zoratto Sanvicente, 5ª ed. São Paulo: Atlas, 1999.

HERMAN JR, Frederico. **Contabilidade Superior**. São Paulo: Atlas, 1956.

HOJI, Masakazu. **Administração financeira e orçamentária**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

HOUAISS, Antonio. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. 1 ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

IUDÍCIBUS, Sérgio de. **Teoria da contabilidade**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2004.

IUDÍCIBUS, Sérgio de; MARTINS, Eliseu; GELBCKE, Ernesto R.. **Manual de contabilidade das sociedades por ações: aplicável às demais sociedades**. FIPECAF. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

JUER, Milton. **Matemática financeira: aplicações no mercado de títulos**. 3 ed. Rio de Janeiro: IBMEC, 1985.

KEYNES, John M.. **A teoria geral do emprego, do juro e da moeda**. São Paulo: Atlas, 1992.

KUHNEN, Osmar L.. **Matemática financeira empresarial**. São Paulo: Atlas, 2006.

LACOMBE, Francisco. **Dicionário de Administração**. São Paulo: Saraiva, 2004.

LAPPONI, Juan C.. **Matemática financeira**. São Paulo: Campus, 2006.

LEMES JÚNIOR, Antonio B.; RIGO, Cláudio M.; CHEROBIM, Ana Paula M. S. **Administração financeira: princípios, fundamentos e práticas brasileiras**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

LOPES, Alexsandro B.; MARTINS, Eliseu. **Teoria da contabilidade**: uma nova abordagem. São Paulo: Atlas, 2005.

MATHIAS, W. Franco; GOMES, J. M.. **Matemática financeira**. 1 ed. São Paulo: Atlas, 1984.

\_\_\_\_\_ **Matemática financeira**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2000.

MILONE, Giuseppe. **Matemática financeira**. São Paulo: Thomson, 2006.

NÁUFEL, José. **Novo dicionário jurídico brasileiro**. 10 ed. Rio de Janeiro: Forense, 2002.

NIYAMA, Jorge K.; GOMES, Amaro L.. **Contribuição ao aperfeiçoamento dos procedimentos de evidenciação contábil aplicáveis às demonstrações financeiras de bancos e instituições assemelhadas**. Anais do XV Congresso Brasileiro de Contabilidade. Brasília: CFC, 1996.

NOGUEIRA, José J. M.. **Tabela Price**: da prova documental e precisa elucidação do seu anatocismo. Campinas: Servanda., 2002.

NUNES, Pedro dos Reis. **Dicionário de Tecnologia Jurídica**. 10 ed. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1979.

PENNA, Edson de Q.. **Tabela Price e a inexistência de capitalização**. Porto Alegre: Age, 2007.

PILÃO, Nivaldo E.; HUMMEL, Paulo R. V.. **Matemática financeira e engenharia econômica**: a teoria e a prática da análise de projetos de investimentos. São Paulo: Thomson, 2004.



PIRES, Marco A. A.; NEGRA, Elizabeth M. S.. **Juros tabela Price** – discussão no âmbito da perícia contábil. Revista Brasileira de Contabilidade, nº. 155, p. 37-53, set/out de 2005.

PRICE, Richard. *Observations on reversionary payments*. 6 ed. Londres: T. Cadell , 1803.

PUCCINI, A. de L.. **Matemática financeira**: objetiva e aplicada. São Paulo: Saraiva, 1999.

\_\_\_\_\_ **Matemática financeira**: objetiva e aplicada. São Paulo: Saraiva, 2006.

RANGEL, Ignácio. **Recursos ociosos e política econômica**. São Paulo: Hucitec, 1980.

REZENDE, Teotônio C.. **Os sistemas de amortização nas operações de crédito imobiliário**: a falácia da capitalização de juros e da inversão do momento de deduzir a quota de amortização.

Dissertação (Mestrado em Gestão e Estratégia de Negócios). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

RUDGE, Luiz F.. **Enciclopédia de Finanças**. São Paulo: Saraiva, 2006.

RUIZ, João A.. **Metodologia científica**: guia para eficiência nos estudos. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1995.

SÁ, Antonio Lopes de. **Teoria da Contabilidade**. São Paulo: Atlas, 1999.

SAMANEZ, Carlos P.. **Matemática financeira**: aplicações à análise de investimentos. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

SANDRONI, Paulo. **Dicionário de administração e finanças**. São Paulo: Best Seller, 1996.

SILVA, De Plácido e. **Vocabulário Jurídico**. 19 ed. Rio de Janeiro: Forense, 2002.

SOUZA, Alceu; CLEMENTE, Ademir. **Matemática financeira**: fundamentos, conceitos, aplicações. São Paulo: Atlas, 2000.

TEIXEIRA, James; DI PIERRO NETTO, Scipione. **Matemática financeira**. São Paulo: Makron Books, 1998.

TENÓRIO, Igor; MAIA, José M.. **Dicionário de Direito Tributário**. Rio de Janeiro: Forense, 1999.

VERAS, Lilia L.. **Matemática financeira**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

VERGARA, Sylvia C.. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2000.

VIEIRA SOBRINHO, J. Dutra. **Matemática financeira**, São Paulo: Atlas, 1998.

\_\_\_\_\_ **Matemática financeira**, São Paulo: Atlas, 2000.

\_\_\_\_\_ **A capitalização dos juros e o conceito de anatocismo**. Sindecon nº. 130, de outubro/2004. Disponível em: <[http://www.sindecon-esp.org.br/template.php?pagina=neodownload/index&category=2&PAGE\\_ID=20&CONTENT\\_ID=27](http://www.sindecon-esp.org.br/template.php?pagina=neodownload/index&category=2&PAGE_ID=20&CONTENT_ID=27)>. Acesso em 12/out/06.

\_\_\_\_\_ **Matemática financeira**, São Paulo: Atlas, 2006.

WESTON, J. Fred; BRIGHAM, Eugene F.. **Fundamentos da administração financeira**. 10 ed. São Paulo: Makron, 2000.

ZENTGRAF, Walter. **Matemática financeira: com emprego de funções e planilhas, modelo Excel**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

### APÊNDICES

n	PGTO	JUROS	AMORT	S DEVEDOR
0				216.000,00
1	2.812,99	2.440,80	372,19	215.627,81
2	2.812,99	2.436,59	376,40	215.251,41
3	2.812,99	2.432,34	380,65	214.870,76
4	2.812,99	2.428,04	384,95	214.485,81
5	2.812,99	2.423,69	389,30	214.096,50
6	2.812,99	2.419,29	393,70	213.702,80
7	2.812,99	2.414,84	398,15	213.304,65
8	2.812,99	2.410,34	402,65	212.902,00
9	2.812,99	2.405,79	407,20	212.494,80
10	2.812,99	2.401,19	411,80	212.083,00
11	2.812,99	2.396,54	416,45	211.666,55
12	2.812,99	2.391,83	421,16	211.245,39
13	2.812,99	2.387,07	425,92	210.819,47
14	2.812,99	2.382,26	430,73	210.388,74
15	2.812,99	2.377,39	435,60	209.953,14
16	2.812,99	2.372,47	440,52	209.512,61
17	2.812,99	2.367,49	445,50	209.067,11
18	2.812,99	2.362,46	450,53	208.616,58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
160	2.812,99	591,28	2.221,72	50.103,69
161	2.812,99	566,17	2.246,82	47.856,87
162	2.812,99	540,78	2.272,21	45.584,66
163	2.812,99	515,11	2.297,89	43.286,77
164	2.812,99	489,14	2.323,85	40.962,92
165	2.812,99	462,88	2.350,11	38.612,81
166	2.812,99	436,32	2.376,67	36.236,14
167	2.812,99	409,47	2.403,52	33.832,62
168	2.812,99	382,31	2.430,68	31.401,93
169	2.812,99	354,84	2.458,15	28.943,78
170	2.812,99	327,06	2.485,93	26.457,86
171	2.812,99	298,97	2.514,02	23.943,84
172	2.812,99	270,57	2.542,43	21.401,41
173	2.812,99	241,84	2.571,16	18.830,25
174	2.812,99	212,78	2.600,21	16.230,04
175	2.812,99	183,40	2.629,59	13.600,45
176	2.812,99	153,69	2.659,31	10.941,14
177	2.812,99	123,63	2.689,36	8.251,79
178	2.812,99	93,25	2.719,75	5.532,04
179	2.812,99	62,51	2.750,48	2.781,56
180	2.812,99	31,43	2.781,56	0,00
<b>Σ</b>	<b>506.338,59</b>	<b>290.338,59</b>	<b>216.000,00</b>	
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>149.753,99</b>	<b>66.246,01</b>	

Apêndice 1: Tabela Price - Planilha tradicional (normal)

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	2.812,99	31,43	2.781,56	215.627,81	0,988826
2	2.812,99	62,51	2.750,48	215.251,41	0,977777
3	2.812,99	93,25	2.719,75	214.870,76	0,966852
4	2.812,99	123,63	2.689,36	214.485,81	0,956049
5	2.812,99	153,69	2.659,31	214.096,50	0,945366
6	2.812,99	183,40	2.629,59	213.702,80	0,934803
7	2.812,99	212,78	2.600,21	213.304,65	0,924357
8	2.812,99	241,84	2.571,16	212.902,00	0,914029
9	2.812,99	270,57	2.542,43	212.494,80	0,903816
10	2.812,99	298,97	2.514,02	212.083,00	0,893717
11	2.812,99	327,06	2.485,93	211.666,55	0,883731
12	2.812,99	354,84	2.458,15	211.245,39	0,873856
13	2.812,99	382,31	2.430,68	210.819,47	0,864092
14	2.812,99	409,47	2.403,52	210.388,74	0,854437
15	2.812,99	436,32	2.376,67	209.953,14	0,844889
16	2.812,99	462,88	2.350,11	209.512,61	0,835449
17	2.812,99	489,14	2.323,85	209.067,11	0,826114
18	2.812,99	515,11	2.297,89	208.616,58	0,816883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	2.812,99	2.341,75	471,25	52.325,40	0,167525
160	2.812,99	2.347,01	465,98	50.103,69	0,165653
161	2.812,99	2.352,22	460,77	47.856,87	0,163802
162	2.812,99	2.357,37	455,62	45.584,66	0,161972
163	2.812,99	2.362,46	450,53	43.286,77	0,160162
164	2.812,99	2.367,49	445,50	40.962,92	0,158372
165	2.812,99	2.372,47	440,52	38.612,81	0,156603
166	2.812,99	2.377,39	435,60	36.236,14	0,154853
167	2.812,99	2.382,26	430,73	33.832,62	0,153122
168	2.812,99	2.387,07	425,92	31.401,93	0,151411
169	2.812,99	2.391,83	421,16	28.943,78	0,149720
170	2.812,99	2.396,54	416,45	26.457,86	0,148047
171	2.812,99	2.401,19	411,80	23.943,84	0,146392
172	2.812,99	2.405,79	407,20	21.401,41	0,144757
173	2.812,99	2.410,34	402,65	18.830,25	0,143139
174	2.812,99	2.414,84	398,15	16.230,04	0,141540
175	2.812,99	2.419,29	393,70	13.600,45	0,139958
176	2.812,99	2.423,69	389,30	10.941,14	0,138394
177	2.812,99	2.428,04	384,95	8.251,79	0,136848
178	2.812,99	2.432,34	380,65	5.532,04	0,135319
179	2.812,99	2.436,59	376,40	2.781,56	0,133807
180	2.812,99	2.440,80	372,19	0,00	0,132312
<b>Σ</b>	<b>506.338,59</b>	<b>290.338,59</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>94.397,38</b>	<b>121.602,62</b>		

Apêndice 2: Tabela Price – Equivalência em capitalização composta

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	2.206,66	24,66	2.182,01	216.234,14	0,988826
2	2.206,66	48,77	2.157,90	216.443,61	0,977899
3	2.206,66	72,35	2.134,31	216.628,71	0,967212
4	2.206,66	95,43	2.111,24	216.789,68	0,956755
5	2.206,66	118,01	2.088,66	216.926,80	0,946522
6	2.206,66	140,11	2.066,55	217.040,32	0,936505
7	2.206,66	161,75	2.044,91	217.130,49	0,926698
8	2.206,66	182,94	2.023,72	217.197,54	0,917095
9	2.206,66	203,70	2.002,96	217.241,73	0,907688
10	2.206,66	224,04	1.982,63	217.263,29	0,898473
11	2.206,66	243,96	1.962,70	217.262,44	0,889442
12	2.206,66	263,49	1.943,17	217.239,42	0,880592
13	2.206,66	282,64	1.924,03	217.194,44	0,871916
14	2.206,66	301,41	1.905,25	217.127,71	0,863409
15	2.206,66	319,82	1.886,84	217.039,46	0,855066
16	2.206,66	337,88	1.868,79	216.929,88	0,846883
17	2.206,66	355,59	1.851,07	216.799,19	0,838856
18	2.206,66	372,97	1.833,69	216.647,58	0,830979
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	2.206,66	1.417,64	789,02	44.392,39	0,357564
160	2.206,66	1.420,82	785,85	42.365,09	0,356125
161	2.206,66	1.423,97	782,70	40.328,91	0,354698
162	2.206,66	1.427,09	779,57	38.283,89	0,353282
163	2.206,66	1.430,19	776,48	36.230,05	0,351877
164	2.206,66	1.433,26	773,40	34.167,45	0,350484
165	2.206,66	1.436,32	770,35	32.096,10	0,349101
166	2.206,66	1.439,34	767,32	30.016,05	0,347729
167	2.206,66	1.442,35	764,32	27.927,33	0,346368
168	2.206,66	1.445,33	761,34	25.829,97	0,345018
169	2.206,66	1.448,28	758,38	23.724,01	0,343678
170	2.206,66	1.451,22	755,45	21.609,48	0,342349
171	2.206,66	1.454,13	752,54	19.486,41	0,341029
172	2.206,66	1.457,02	749,65	17.354,84	0,339720
173	2.206,66	1.459,88	746,78	15.214,80	0,338421
174	2.206,66	1.462,73	743,94	13.066,31	0,337132
175	2.206,66	1.465,55	741,11	10.909,43	0,335852
176	2.206,66	1.468,35	738,31	8.744,17	0,334582
177	2.206,66	1.471,13	735,53	6.570,56	0,333322
178	2.206,66	1.473,89	732,77	4.388,64	0,332071
179	2.206,66	1.476,63	730,03	2.198,45	0,330830
180	2.206,66	1.479,35	727,31	0,00	0,329598
<b>Σ</b>	<b>397.199,69</b>	<b>181.199,69</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>169.442,22</b>	<b>60.335,33</b>	<b>109.106,88</b>		

Apêndice 3: Tabela Price – Equivalência em capitalização simples

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>
0				216.000,00
1	3.640,80	2.440,80	1.200,00	214.800,00
2	3.627,24	2.427,24	1.200,00	213.600,00
3	3.613,68	2.413,68	1.200,00	212.400,00
4	3.600,12	2.400,12	1.200,00	211.200,00
5	3.586,56	2.386,56	1.200,00	210.000,00
6	3.573,00	2.373,00	1.200,00	208.800,00
7	3.559,44	2.359,44	1.200,00	207.600,00
8	3.545,88	2.345,88	1.200,00	206.400,00
9	3.532,32	2.332,32	1.200,00	205.200,00
10	3.518,76	2.318,76	1.200,00	204.000,00
11	3.505,20	2.305,20	1.200,00	202.800,00
12	3.491,64	2.291,64	1.200,00	201.600,00
13	3.478,08	2.278,08	1.200,00	200.400,00
14	3.464,52	2.264,52	1.200,00	199.200,00
15	3.450,96	2.250,96	1.200,00	198.000,00
16	3.437,40	2.237,40	1.200,00	196.800,00
17	3.423,84	2.223,84	1.200,00	195.600,00
18	3.410,28	2.210,28	1.200,00	194.400,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	1.498,32	298,32	1.200,00	25.200,00
160	1.484,76	284,76	1.200,00	24.000,00
161	1.471,20	271,20	1.200,00	22.800,00
162	1.457,64	257,64	1.200,00	21.600,00
163	1.444,08	244,08	1.200,00	20.400,00
164	1.430,52	230,52	1.200,00	19.200,00
165	1.416,96	216,96	1.200,00	18.000,00
166	1.403,40	203,40	1.200,00	16.800,00
167	1.389,84	189,84	1.200,00	15.600,00
168	1.376,28	176,28	1.200,00	14.400,00
169	1.362,72	162,72	1.200,00	13.200,00
170	1.349,16	149,16	1.200,00	12.000,00
171	1.335,60	135,60	1.200,00	10.800,00
172	1.322,04	122,04	1.200,00	9.600,00
173	1.308,48	108,48	1.200,00	8.400,00
174	1.294,92	94,92	1.200,00	7.200,00
175	1.281,36	81,36	1.200,00	6.000,00
176	1.267,80	67,80	1.200,00	4.800,00
177	1.254,24	54,24	1.200,00	3.600,00
178	1.240,68	40,68	1.200,00	2.400,00
179	1.227,12	27,12	1.200,00	1.200,00
180	1.213,56	13,56	1.200,00	0,00
<b>Σ</b>	<b>436.892,40</b>	<b>220.892,40</b>	<b>216.000,00</b>	
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>123.856,12</b>	<b>92.143,88</b>	

Apêndice 4: Sistema SAC - Planilha tradicional (normal)

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	1.213,56	13,56	1.200,00	217.227,24	0,988826
2	1.227,27	27,27	1.200,00	218.454,63	0,977777
3	1.241,14	41,14	1.200,00	219.682,03	0,966852
4	1.255,17	55,17	1.200,00	220.909,27	0,956049
5	1.269,35	69,35	1.200,00	222.136,20	0,945366
6	1.283,69	83,69	1.200,00	223.362,64	0,934803
7	1.298,20	98,20	1.200,00	224.588,44	0,924357
8	1.312,87	112,87	1.200,00	225.813,42	0,914029
9	1.327,70	127,70	1.200,00	227.037,41	0,903816
10	1.342,71	142,71	1.200,00	228.260,22	0,893717
11	1.357,88	157,88	1.200,00	229.481,69	0,883731
12	1.373,22	173,22	1.200,00	230.701,60	0,873856
13	1.388,74	188,74	1.200,00	231.919,79	0,864092
14	1.404,43	204,43	1.200,00	233.136,05	0,854437
15	1.420,30	220,30	1.200,00	234.350,18	0,844889
16	1.436,35	236,35	1.200,00	235.561,99	0,835449
17	1.452,58	252,58	1.200,00	236.771,25	0,826114
18	1.469,00	269,00	1.200,00	237.977,77	0,816883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	7.163,12	5.963,12	1.200,00	150.425,58	0,167525
160	7.244,07	6.044,07	1.200,00	144.881,32	0,165653
161	7.325,92	6.125,92	1.200,00	139.192,56	0,163802
162	7.408,71	6.208,71	1.200,00	133.356,73	0,161972
163	7.492,43	6.292,43	1.200,00	127.371,23	0,160162
164	7.577,09	6.377,09	1.200,00	121.233,44	0,158372
165	7.662,71	6.462,71	1.200,00	114.940,66	0,156603
166	7.749,30	6.549,30	1.200,00	108.490,19	0,154853
167	7.836,87	6.636,87	1.200,00	101.879,27	0,153122
168	7.925,42	6.725,42	1.200,00	95.105,08	0,151411
169	8.014,98	6.814,98	1.200,00	88.164,79	0,149720
170	8.105,55	6.905,55	1.200,00	81.055,50	0,148047
171	8.197,14	6.997,14	1.200,00	73.774,28	0,146392
172	8.289,77	7.089,77	1.200,00	66.318,16	0,144757
173	8.383,44	7.183,44	1.200,00	58.684,11	0,143139
174	8.478,18	7.278,18	1.200,00	50.869,07	0,141540
175	8.573,98	7.373,98	1.200,00	42.869,90	0,139958
176	8.670,87	7.470,87	1.200,00	34.683,47	0,138394
177	8.768,85	7.568,85	1.200,00	26.306,54	0,136848
178	8.867,94	7.667,94	1.200,00	17.735,87	0,135319
179	8.968,14	7.768,14	1.200,00	8.968,14	0,133807
180	9.069,48	7.869,48	1.200,00	0,00	0,132312
<b>Σ</b>	<b>704.283,94</b>	<b>488.283,94</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>123.856,12</b>	<b>92.143,88</b>		

Apêndice 5: Sistema SAC – Equivalência em capitalização composta

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	1.213,56	13,56	1.200,00	217.227,24	0,988826
2	1.227,12	27,12	1.200,00	218.427,36	0,977899
3	1.240,68	40,68	1.200,00	219.600,36	0,967212
4	1.254,24	54,24	1.200,00	220.746,24	0,956755
5	1.267,80	67,80	1.200,00	221.865,00	0,946522
6	1.281,36	81,36	1.200,00	222.956,64	0,936505
7	1.294,92	94,92	1.200,00	224.021,16	0,926698
8	1.308,48	108,48	1.200,00	225.058,56	0,917095
9	1.322,04	122,04	1.200,00	226.068,84	0,907688
10	1.335,60	135,60	1.200,00	227.052,00	0,898473
11	1.349,16	149,16	1.200,00	228.008,04	0,889442
12	1.362,72	162,72	1.200,00	228.936,96	0,880592
13	1.376,28	176,28	1.200,00	229.838,76	0,871916
14	1.389,84	189,84	1.200,00	230.713,44	0,863409
15	1.403,40	203,40	1.200,00	231.561,00	0,855066
16	1.416,96	216,96	1.200,00	232.381,44	0,846883
17	1.430,52	230,52	1.200,00	233.174,76	0,838856
18	1.444,08	244,08	1.200,00	233.940,96	0,830979
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	3.356,04	2.156,04	1.200,00	70.476,84	0,357564
160	3.369,60	2.169,60	1.200,00	67.392,00	0,356125
161	3.383,16	2.183,16	1.200,00	64.280,04	0,354698
162	3.396,72	2.196,72	1.200,00	61.140,96	0,353282
163	3.410,28	2.210,28	1.200,00	57.974,76	0,351877
164	3.423,84	2.223,84	1.200,00	54.781,44	0,350484
165	3.437,40	2.237,40	1.200,00	51.561,00	0,349101
166	3.450,96	2.250,96	1.200,00	48.313,44	0,347729
167	3.464,52	2.264,52	1.200,00	45.038,76	0,346368
168	3.478,08	2.278,08	1.200,00	41.736,96	0,345018
169	3.491,64	2.291,64	1.200,00	38.408,04	0,343678
170	3.505,20	2.305,20	1.200,00	35.052,00	0,342349
171	3.518,76	2.318,76	1.200,00	31.668,84	0,341029
172	3.532,32	2.332,32	1.200,00	28.258,56	0,339720
173	3.545,88	2.345,88	1.200,00	24.821,16	0,338421
174	3.559,44	2.359,44	1.200,00	21.356,64	0,337132
175	3.573,00	2.373,00	1.200,00	17.865,00	0,335852
176	3.586,56	2.386,56	1.200,00	14.346,24	0,334582
177	3.600,12	2.400,12	1.200,00	10.800,36	0,333322
178	3.613,68	2.413,68	1.200,00	7.227,36	0,332071
179	3.627,24	2.427,24	1.200,00	3.627,24	0,330830
180	3.640,80	2.440,80	1.200,00	0,00	0,329598
<b>Σ</b>	<b>436.892,40</b>	<b>220.892,40</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>156.749,62</b>	<b>64.605,74</b>	<b>92.143,88</b>		

Apêndice 6: Sistema SAC – Equivalência em capitalização simples

Fonte: Elaborado pelo autor



<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>
0				216.000,00
1	3.226,90	2.440,80	786,10	215.213,90
2	3.220,12	2.431,92	788,20	214.425,70
3	3.213,34	2.423,01	790,33	213.635,38
4	3.206,56	2.414,08	792,48	212.842,90
5	3.199,78	2.405,12	794,65	212.048,25
6	3.193,00	2.396,15	796,85	211.251,40
7	3.186,22	2.387,14	799,08	210.452,33
8	3.179,44	2.378,11	801,32	209.651,00
9	3.172,66	2.369,06	803,60	208.847,40
10	3.165,88	2.359,98	805,90	208.041,50
11	3.159,10	2.350,87	808,23	207.233,27
12	3.152,32	2.341,74	810,58	206.422,69
13	3.145,54	2.332,58	812,96	205.609,73
14	3.138,76	2.323,39	815,37	204.794,37
15	3.131,98	2.314,18	817,80	203.976,57
16	3.125,20	2.304,94	820,26	203.156,31
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
157	2.169,22	495,18	1.674,03	42.147,32
158	2.162,44	476,26	1.686,17	40.461,15
159	2.155,66	457,21	1.698,45	38.762,70
160	2.148,88	438,02	1.710,86	37.051,84
161	2.142,10	418,69	1.723,41	35.328,43
162	2.135,32	399,21	1.736,10	33.592,33
163	2.128,54	379,59	1.748,94	31.843,39
164	2.121,76	359,83	1.761,93	30.081,46
165	2.114,98	339,92	1.775,06	28.306,40
166	2.108,20	319,86	1.788,33	26.518,07
167	2.101,42	299,65	1.801,76	24.716,31
168	2.094,64	279,29	1.815,34	22.900,97
169	2.087,86	258,78	1.829,08	21.071,89
170	2.081,08	238,11	1.842,96	19.228,93
171	2.074,30	217,29	1.857,01	17.371,92
172	2.067,52	196,30	1.871,21	15.500,71
173	2.060,74	175,16	1.885,58	13.615,13
174	2.053,96	153,85	1.900,11	11.715,02
175	2.047,18	132,38	1.914,80	9.800,23
176	2.040,40	110,74	1.929,65	7.870,57
177	2.033,62	88,94	1.944,68	5.925,89
178	2.026,84	66,96	1.959,87	3.966,02
179	2.020,06	44,82	1.975,24	1.990,78
180	2.013,28	22,50	1.990,78	0,00
<b>Σ</b>	<b>471.615,49</b>	<b>255.615,49</b>	<b>216.000,00</b>	
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>136.805,06</b>	<b>79.194,94</b>	

Apêndice 7: Sistema SAM - Planilha tradicional (normal)

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	2.013,28	22,50	1.990,78	216.427,52	0,988826
2	2.020,13	44,89	1.975,24	216.853,02	0,977777
3	2.027,07	67,19	1.959,87	217.276,39	0,966852
4	2.034,08	89,40	1.944,68	217.697,54	0,956049
5	2.041,17	111,52	1.929,65	218.116,35	0,945366
6	2.048,34	133,55	1.914,80	218.532,72	0,934803
7	2.055,60	155,49	1.900,11	218.946,55	0,924357
8	2.062,93	177,35	1.885,58	219.357,71	0,914029
9	2.070,35	199,13	1.871,21	219.766,11	0,903816
10	2.077,85	220,84	1.857,01	220.171,61	0,893717
11	2.085,44	242,47	1.842,96	220.574,12	0,883731
12	2.093,11	264,03	1.829,08	220.973,50	0,873856
13	2.100,87	285,52	1.815,34	221.369,63	0,864092
14	2.108,71	306,95	1.801,76	221.762,39	0,854437
15	2.116,65	328,31	1.788,33	222.151,66	0,844889
16	2.124,67	349,62	1.775,06	222.537,30	0,835449
17	2.132,79	370,86	1.761,93	222.919,18	0,826114
18	2.141,00	392,05	1.748,94	223.297,18	0,816883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	4.988,06	4.152,43	835,62	101.375,49	0,167525
160	5.028,53	4.195,54	832,99	97.492,50	0,165653
161	5.069,46	4.239,07	830,39	93.524,71	0,163802
162	5.110,85	4.283,04	827,81	89.470,69	0,161972
163	5.152,71	4.327,44	825,27	85.329,00	0,160162
164	5.195,04	4.372,29	822,75	81.098,18	0,158372
165	5.237,85	4.417,59	820,26	76.776,74	0,156603
166	5.281,15	4.463,35	817,80	72.363,17	0,154853
167	5.324,93	4.509,56	815,37	67.855,94	0,153122
168	5.369,21	4.556,25	812,96	63.253,51	0,151411
169	5.413,99	4.603,41	810,58	58.554,28	0,149720
170	5.459,27	4.651,04	808,23	53.756,68	0,148047
171	5.505,07	4.699,17	805,90	48.859,06	0,146392
172	5.551,38	4.747,78	803,60	43.859,79	0,144757
173	5.598,22	4.796,89	801,32	38.757,18	0,143139
174	5.645,58	4.846,51	799,08	33.549,55	0,141540
175	5.693,49	4.896,64	796,85	28.235,18	0,139958
176	5.741,93	4.947,28	794,65	22.812,31	0,138394
177	5.790,92	4.998,44	792,48	17.279,17	0,136848
178	5.840,46	5.050,14	790,33	11.633,96	0,135319
179	5.890,57	5.102,37	788,20	5.874,85	0,133807
180	5.941,24	5.155,14	786,10	0,00	0,132312
<b>Σ</b>	<b>605.311,27</b>	<b>389.311,27</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>109.126,75</b>	<b>106.873,25</b>		

Apêndice 8: Sistema SAM – Equivalência em capitalização composta

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	1.710,11	19,11	1.691,00	216.730,69	0,988826
2	1.716,89	37,94	1.678,95	217.435,49	0,977899
3	1.723,67	56,52	1.667,16	218.114,53	0,967212
4	1.730,45	74,83	1.655,62	218.767,96	0,956755
5	1.737,23	92,90	1.644,33	219.395,90	0,946522
6	1.744,01	110,74	1.633,28	219.998,48	0,936505
7	1.750,79	128,34	1.622,46	220.575,82	0,926698
8	1.757,57	145,71	1.611,86	221.128,05	0,917095
9	1.764,35	162,87	1.601,48	221.655,29	0,907688
10	1.771,13	179,82	1.591,31	222.157,65	0,898473
11	1.777,91	196,56	1.581,35	222.635,24	0,889442
12	1.784,69	213,11	1.571,59	223.088,19	0,880592
13	1.791,47	229,46	1.562,01	223.516,60	0,871916
14	1.798,25	245,63	1.552,63	223.920,58	0,863409
15	1.805,03	261,61	1.543,42	224.300,23	0,855066
16	1.811,81	277,42	1.534,39	224.655,66	0,846883
17	1.818,59	293,06	1.525,54	224.986,97	0,838856
18	1.825,37	308,53	1.516,85	225.294,27	0,830979
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	2.781,35	1.786,84	994,51	57.434,61	0,357564
160	2.788,13	1.795,21	992,92	54.878,54	0,356125
161	2.794,91	1.803,56	991,35	52.304,47	0,354698
162	2.801,69	1.811,90	989,79	49.712,42	0,353282
163	2.808,47	1.820,23	988,24	47.102,41	0,351877
164	2.815,25	1.828,55	986,70	44.474,44	0,350484
165	2.822,03	1.836,86	985,17	41.828,55	0,349101
166	2.828,81	1.845,15	983,66	39.164,75	0,347729
167	2.835,59	1.853,43	982,16	36.483,04	0,346368
168	2.842,37	1.861,70	980,67	33.783,47	0,345018
169	2.849,15	1.869,96	979,19	31.066,02	0,343678
170	2.855,93	1.878,21	977,72	28.330,74	0,342349
171	2.862,71	1.886,44	976,27	25.577,63	0,341029
172	2.869,49	1.894,67	974,82	22.806,70	0,339720
173	2.876,27	1.902,88	973,39	20.017,98	0,338421
174	2.883,05	1.911,08	971,97	17.211,48	0,337132
175	2.889,83	1.919,28	970,56	14.387,21	0,335852
176	2.896,61	1.927,46	969,16	11.545,20	0,334582
177	2.903,39	1.935,63	967,77	8.685,46	0,333322
178	2.910,17	1.943,79	966,39	5.808,00	0,332071
179	2.916,95	1.951,94	965,02	2.912,84	0,330830
180	2.923,73	1.960,08	963,66	0,00	0,329598
<b>Σ</b>	<b>417.046,04</b>	<b>201.046,04</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>163.095,92</b>	<b>62.470,54</b>	<b>100.625,38</b>		

Apêndice 9: Sistema SAM – Equivalência em capitalização simples

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>
0				216.000,00
1	3.640,80	2.440,80	1.200,00	214.800,00
2	3.640,80	2.427,24	1.213,56	213.586,44
3	3.640,80	2.413,53	1.227,27	212.359,17
4	3.640,80	2.399,66	1.241,14	211.118,03
5	3.640,80	2.385,63	1.255,17	209.862,86
6	3.640,80	2.371,45	1.269,35	208.593,51
7	3.640,80	2.357,11	1.283,69	207.309,82
8	3.640,80	2.342,60	1.298,20	206.011,62
9	3.640,80	2.327,93	1.312,87	204.698,75
10	3.640,80	2.313,10	1.327,70	203.371,04
11	3.640,80	2.298,09	1.342,71	202.028,34
12	3.640,80	2.282,92	1.357,88	200.670,46
13	3.462,04	2.267,58	1.194,47	199.475,99
14	3.462,04	2.254,08	1.207,96	198.268,03
15	3.462,04	2.240,43	1.221,61	197.046,41
16	3.462,04	2.226,62	1.235,42	195.810,99
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
157	1.317,48	281,07	1.036,41	23.837,39
158	1.317,48	269,36	1.048,12	22.789,27
159	1.317,48	257,52	1.059,96	21.729,31
160	1.317,48	245,54	1.071,94	20.657,37
161	1.317,48	233,43	1.084,05	19.573,31
162	1.317,48	221,18	1.096,30	18.477,01
163	1.317,48	208,79	1.108,69	17.368,32
164	1.317,48	196,26	1.121,22	16.247,10
165	1.317,48	183,59	1.133,89	15.113,21
166	1.317,48	170,78	1.146,70	13.966,51
167	1.317,48	157,82	1.159,66	12.806,84
168	1.317,48	144,72	1.172,77	11.634,08
169	1.100,97	131,47	969,51	10.664,57
170	1.100,97	120,51	980,46	9.684,11
171	1.100,97	109,43	991,54	8.692,57
172	1.100,97	98,23	1.002,75	7.689,82
173	1.100,97	86,90	1.014,08	6.675,75
174	1.100,97	75,44	1.025,54	5.650,21
175	1.100,97	63,85	1.037,12	4.613,09
176	1.100,97	52,13	1.048,84	3.564,24
177	1.100,97	40,28	1.060,70	2.503,55
178	1.100,97	28,29	1.072,68	1.430,87
179	1.100,97	16,17	1.084,80	346,06
180	349,97	3,91	346,06	0,00
<b>Σ</b>	<b>429.896,62</b>	<b>213.896,62</b>	<b>216.000,00</b>	
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>121.381,53</b>	<b>94.618,47</b>	

Apêndice 10: Sistema SACRE - Planilha tradicional (normal)

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	3.640,80	40,68	3.600,12	214.800,00	0,988826
2	3.640,80	80,91	3.559,89	213.586,44	0,977777
3	3.640,80	120,69	3.520,11	212.359,17	0,966852
4	3.640,80	160,02	3.480,78	211.118,03	0,956049
5	3.640,80	198,91	3.441,89	209.862,86	0,945366
6	3.640,80	237,37	3.403,43	208.593,51	0,934803
7	3.640,80	275,40	3.365,40	207.309,82	0,924357
8	3.640,80	313,00	3.327,80	206.011,62	0,914029
9	3.640,80	350,19	3.290,61	204.698,75	0,903816
10	3.640,80	386,96	3.253,84	203.371,04	0,893717
11	3.640,80	423,31	3.217,49	202.028,34	0,883731
12	3.640,80	459,26	3.181,54	200.670,46	0,873856
13	3.462,04	470,52	2.991,52	199.475,99	0,864092
14	3.462,04	503,95	2.958,10	198.268,03	0,854437
15	3.462,04	537,00	2.925,04	197.046,41	0,844889
16	3.462,04	569,68	2.892,36	195.810,99	0,835449
17	3.462,04	602,00	2.860,04	194.561,61	0,826114
18	3.462,04	633,96	2.828,08	193.298,12	0,816883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	1.317,48	1.096,77	220,71	21.729,31	0,167525
160	1.317,48	1.099,24	218,24	20.657,37	0,165653
161	1.317,48	1.101,68	215,81	19.573,31	0,163802
162	1.317,48	1.104,09	213,39	18.477,01	0,161972
163	1.317,48	1.106,47	211,01	17.368,32	0,160162
164	1.317,48	1.108,83	208,65	16.247,10	0,158372
165	1.317,48	1.111,16	206,32	15.113,21	0,156603
166	1.317,48	1.113,47	204,02	13.966,51	0,154853
167	1.317,48	1.115,75	201,74	12.806,84	0,153122
168	1.317,48	1.118,00	199,48	11.634,08	0,151411
169	1.100,97	936,13	164,84	10.664,57	0,149720
170	1.100,97	937,98	163,00	9.684,11	0,148047
171	1.100,97	939,80	161,17	8.692,57	0,146392
172	1.100,97	941,60	159,37	7.689,82	0,144757
173	1.100,97	943,38	157,59	6.675,75	0,143139
174	1.100,97	945,14	155,83	5.650,21	0,141540
175	1.100,97	946,88	154,09	4.613,09	0,139958
176	1.100,97	948,60	152,37	3.564,24	0,138394
177	1.100,97	950,31	150,67	2.503,55	0,136848
178	1.100,97	951,99	148,98	1.430,87	0,135319
179	1.100,97	953,65	147,32	346,06	0,133807
180	349,97	303,67	46,31	0,00	0,132312
<b>Σ</b>	<b>429.896,62</b>	<b>213.896,62</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>81.437,44</b>	<b>134.562,56</b>		

Apêndice 11: Sistema SACRE – Equivalência em capitalização composta

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	3.053,63	34,12	3.019,51	215.387,17	0,988826
2	3.053,63	67,49	2.986,14	214.740,22	0,977899
3	3.053,63	100,12	2.953,51	214.059,53	0,967212
4	3.053,63	132,06	2.921,57	213.345,46	0,956755
5	3.053,63	163,30	2.890,33	212.598,37	0,946522
6	3.053,63	193,89	2.859,74	211.818,63	0,936505
7	3.053,63	223,84	2.829,79	211.006,57	0,926698
8	3.053,63	253,16	2.800,47	210.162,54	0,917095
9	3.053,63	281,89	2.771,74	209.286,86	0,907688
10	3.053,63	310,03	2.743,60	208.379,86	0,898473
11	3.053,63	337,60	2.716,03	207.441,85	0,889442
12	3.053,63	364,63	2.689,00	206.473,16	0,880592
13	2.903,70	371,92	2.531,78	205.624,01	0,871916
14	2.903,70	396,62	2.507,08	204.746,24	0,863409
15	2.903,70	420,84	2.482,86	203.840,15	0,855066
16	2.903,70	444,60	2.459,10	202.906,00	0,846883
17	2.903,70	467,91	2.435,79	201.944,07	0,838856
18	2.903,70	490,79	2.412,92	200.954,61	0,830979
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	1.105,01	709,89	395,11	19.598,19	0,357564
160	1.105,01	711,49	393,52	18.572,38	0,356125
161	1.105,01	713,06	391,94	17.542,11	0,354698
162	1.105,01	714,63	390,38	16.507,41	0,353282
163	1.105,01	716,18	388,83	15.468,31	0,351877
164	1.105,01	717,72	387,29	14.424,81	0,350484
165	1.105,01	719,25	385,76	13.376,93	0,349101
166	1.105,01	720,76	384,24	12.324,69	0,347729
167	1.105,01	722,27	382,74	11.268,12	0,346368
168	1.105,01	723,76	381,25	10.207,21	0,345018
169	923,41	606,06	317,36	9.323,60	0,343678
170	923,41	607,28	316,13	8.436,39	0,342349
171	923,41	608,50	314,91	7.545,62	0,341029
172	923,41	609,71	313,70	6.651,28	0,339720
173	923,41	610,91	312,50	5.753,40	0,338421
174	923,41	612,10	311,31	4.851,99	0,337132
175	923,41	613,28	310,13	3.947,06	0,335852
176	923,41	614,45	308,96	3.038,63	0,334582
177	923,41	615,62	307,79	2.126,71	0,333322
178	923,41	616,77	306,64	1.211,31	0,332071
179	923,41	617,92	305,49	292,44	0,330830
180	293,53	196,78	96,75	0,00	0,329598
<b>Σ</b>	<b>360.565,06</b>	<b>144.565,06</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>181.164,61</b>	<b>56.467,41</b>	<b>124.697,20</b>		

Apêndice 12: Sistema SACRE – Equivalência em capitalização simples

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>
0				216.000,00
1	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
2	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
3	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
4	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
5	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
6	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
7	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
8	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
9	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
10	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
11	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
12	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
13	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
14	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
15	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
16	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
17	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
158	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
159	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
160	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
161	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
162	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
163	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
164	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
165	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
166	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
167	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
168	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
169	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
170	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
171	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
172	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
173	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
174	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
175	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
176	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
177	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
178	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
179	2.440,80	2.440,80	0,00	216.000,00
180	218.440,80	2.440,80	216.000,00	0,00
<b>Σ</b>	<b>655.344,00</b>	<b>439.344,00</b>	<b>216.000,00</b>	
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>187.420,64</b>	<b>28.579,36</b>	

Apêndice 13: Sistema AMERICANO - Planilha tradicional (normal)

Fonte: Elaborado pelo autor

<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	2.440,80	27,27	2.413,53	216.000,00	0,988826
2	2.440,80	54,24	2.386,56	216.000,00	0,977777
3	2.440,80	80,91	2.359,89	216.000,00	0,966852
4	2.440,80	107,28	2.333,52	216.000,00	0,956049
5	2.440,80	133,35	2.307,45	216.000,00	0,945366
6	2.440,80	159,13	2.281,67	216.000,00	0,934803
7	2.440,80	184,63	2.256,17	216.000,00	0,924357
8	2.440,80	209,84	2.230,96	216.000,00	0,914029
9	2.440,80	234,77	2.206,03	216.000,00	0,903816
10	2.440,80	259,42	2.181,38	216.000,00	0,893717
11	2.440,80	283,79	2.157,01	216.000,00	0,883731
12	2.440,80	307,89	2.132,91	216.000,00	0,873856
13	2.440,80	331,72	2.109,08	216.000,00	0,864092
14	2.440,80	355,29	2.085,51	216.000,00	0,854437
15	2.440,80	378,59	2.062,21	216.000,00	0,844889
16	2.440,80	401,64	2.039,16	216.000,00	0,835449
17	2.440,80	424,42	2.016,38	216.000,00	0,826114
18	2.440,80	446,95	1.993,85	216.000,00	0,816883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	2.440,80	2.031,91	408,89	216.000,00	0,167525
160	2.440,80	2.036,47	404,33	216.000,00	0,165653
161	2.440,80	2.040,99	399,81	216.000,00	0,163802
162	2.440,80	2.045,46	395,34	216.000,00	0,161972
163	2.440,80	2.049,88	390,92	216.000,00	0,160162
164	2.440,80	2.054,25	386,55	216.000,00	0,158372
165	2.440,80	2.058,56	382,24	216.000,00	0,156603
166	2.440,80	2.062,84	377,96	216.000,00	0,154853
167	2.440,80	2.067,06	373,74	216.000,00	0,153122
168	2.440,80	2.071,23	369,57	216.000,00	0,151411
169	2.440,80	2.075,36	365,44	216.000,00	0,149720
170	2.440,80	2.079,45	361,35	216.000,00	0,148047
171	2.440,80	2.083,49	357,31	216.000,00	0,146392
172	2.440,80	2.087,48	353,32	216.000,00	0,144757
173	2.440,80	2.091,43	349,37	216.000,00	0,143139
174	2.440,80	2.095,33	345,47	216.000,00	0,141540
175	2.440,80	2.099,19	341,61	216.000,00	0,139958
176	2.440,80	2.103,01	337,79	216.000,00	0,138394
177	2.440,80	2.106,78	334,02	216.000,00	0,136848
178	2.440,80	2.110,51	330,29	216.000,00	0,135319
179	2.440,80	2.114,20	326,60	216.000,00	0,133807
180	218.440,80	189.538,50	28.902,30	0,00	0,132312
<b>Σ</b>	<b>655.344,00</b>	<b>439.344,00</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>216.000,00</b>	<b>106.705,46</b>	<b>109.294,54</b>		

Apêndice 14: Sistema AMERICANO – Equivalência em capitalização composta  
Fonte: Elaborado pelo autor



<b>n</b>	<b>PGTO</b>	<b>JUROS</b>	<b>AMORT</b>	<b>S DEVEDOR</b>	<b>FATOR</b>
0				216.000,00	1,000000
1	1.479,35	16,72	1.462,82	216.961,45	0,988826
2	1.479,35	32,69	1.446,66	217.906,36	0,977899
3	1.479,35	48,51	1.430,85	218.834,93	0,967212
4	1.479,35	63,98	1.415,38	219.747,34	0,956755
5	1.479,35	79,11	1.400,24	220.643,74	0,946522
6	1.479,35	93,93	1.385,42	221.524,33	0,936505
7	1.479,35	108,44	1.370,91	222.389,26	0,926698
8	1.479,35	122,65	1.356,71	223.238,70	0,917095
9	1.479,35	136,56	1.342,79	224.072,80	0,907688
10	1.479,35	150,19	1.329,16	224.891,74	0,898473
11	1.479,35	163,55	1.315,80	225.695,65	0,889442
12	1.479,35	176,65	1.302,71	226.484,70	0,880592
13	1.479,35	189,48	1.289,87	227.259,02	0,871916
14	1.479,35	202,07	1.277,29	228.018,77	0,863409
15	1.479,35	214,41	1.264,94	228.764,09	0,855066
16	1.479,35	226,51	1.252,84	229.495,11	0,846883
17	1.479,35	238,39	1.240,96	230.211,98	0,838856
18	1.479,35	250,04	1.229,31	230.914,82	0,830979
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
159	1.479,35	950,39	528,96	228.866,62	0,357564
160	1.479,35	952,52	526,84	228.311,99	0,356125
161	1.479,35	954,63	524,72	227.751,42	0,354698
162	1.479,35	956,72	522,63	227.184,91	0,353282
163	1.479,35	958,80	520,55	226.612,50	0,351877
164	1.479,35	960,86	518,49	226.034,21	0,350484
165	1.479,35	962,91	516,44	225.450,06	0,349101
166	1.479,35	964,94	514,41	224.860,07	0,347729
167	1.479,35	966,95	512,40	224.264,27	0,346368
168	1.479,35	968,95	510,40	223.662,68	0,345018
169	1.479,35	970,93	508,42	223.055,32	0,343678
170	1.479,35	972,90	506,45	222.442,21	0,342349
171	1.479,35	974,85	504,50	221.823,39	0,341029
172	1.479,35	976,79	502,57	221.198,86	0,339720
173	1.479,35	978,71	500,64	220.568,65	0,338421
174	1.479,35	980,62	498,74	219.932,79	0,337132
175	1.479,35	982,51	496,84	219.291,29	0,335852
176	1.479,35	984,39	494,97	218.644,18	0,334582
177	1.479,35	986,25	493,10	217.991,47	0,333322
178	1.479,35	988,10	491,25	217.333,19	0,332071
179	1.479,35	989,94	489,41	216.669,36	0,330830
180	217.479,35	145.798,62	71.680,74	0,00	0,329598
<b>Σ</b>	<b>482.283,51</b>	<b>266.283,69</b>	<b>216.000,00</b>		
<b>VP</b>	<b>142.173,78</b>	<b>59.608,78</b>	<b>82.565,18</b>		

Apêndice 15: Sistema AMERICANO – Equivalência em capitalização simples

Fonte: Elaborado pelo autor

