PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

SÓ É APLICÁVEL

NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

PARA FACILITAR OS CÁLCULOS

DE MONTANTES

[*] Pedro Schubert

Rio, 06 de abril de 2020

[*] Administrador, Autor, Professor FGV-Rio, Perito Judicial TJ-RJ e Varas Federais, Contador. Membro da Comissão Especial de Perícia Judicial, Extrajudicial e Administração Judicial – CEPAJ – do Conselho Federal de Administração – CFA.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Contribui, com a Matemática Financeira, SÓ para FACILITAR e calcular os valores de MONTANTES de n Termos Iguais.

A sua contribuição para obter a Tábua V – $\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}$ – Desconto Composto – é desnecessária, pois a Matemática Financeira, no capítulo de Desconto Composto, obtém esta Tábua V e com didática, como veremos em **VALOR ATUAL**.

Esta Progressão Geométrica, matematicamente, só precisa ser chamada para " explicar que a Tabela Price [1] utilizada em 1771 – Século XVIII – pelo Sr. Price para calcular Montantes, tem Juro Composto ".

O Sistema Francês de Amortização (erroneamente denominado Tabela Price) funciona com DESCONTO COMPOSTO e não precisa desta ajuda.

NO ESTUDO DE RENDAS CERTAS, temos :

MONTANTE – que fundamenta no JURO COMPOSTO – $(1 + i)^n$, Tábua I e, na sua
(FV na HP12C) definição diz :

> **" Chama-se Montante ou Valor Final de uma renda, a soma dos montantes, de cada um dos seus termos, durante o prazo decorrido, do vencimento de cada um, ao vencimento do último termo ".**

Tratando-se de uma renda de n Termos :

- o montante do 1º Termo será calculado durante n^{-1} períodos
- do 2º Termo durante n^{-2} , etc
- E do último Termo será ele próprio

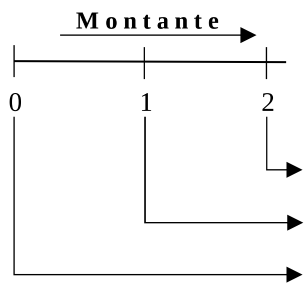
Simbolicamente :

$$S_{\overline{n|}} = FV = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1$$

└→ Simbolismo da matemática financeira em 1960

As aplicações em MONTANTES diferem das aplicações na MODALIDADE TRÊS por que, nesta, as aplicações financeiras sempre começam DA DATA ZERO; em MONTANTES são defasadas de um período financeiro.

Graficamente, temos : **Aqui denominaremos o Termo de a = 1.000,00 e a Taxa de Juro de 10% e n Termos**



				R$ 1,00
3º Termo	= **a . $(1+i)^0$**	= **1.000,00 . 1**	=	**1.000,00**
2º Termo	= **a . $(1+i)$**	= **1.000,00 . 1,10**	=	**1.100,00**
1º Termo	= **a . $(1+i)^2$**	= **1.000,00 . 1,210**	=	**1.210,00**
			Σ	**3.310,00**

[1] Sobre esta Tabela Price que, na DECLARAÇÃO a seguir, refere-se às Tábua I – $(1 + i)^n$, Tábua II – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e a Tábua VI – $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$. Ver neste site na Trilha : Pericia Judicial / Contratos de Empréstimos e Financiamentos / Declaração de Autores e Professores / Declaração de 16 Autores e Professores Sobre a Tabela Price em Julho de 2004 : Comentamos esta Declaração de 16 Autores ...

Sinteticamente, temos : $(1 + i)^2$

$(1 + i)$

$$\underline{(1 + i)^0}$$

$$\sum_{t=1}^{n} (1 + i)^t$$

Este procedimento, Termo a Termo, para calcular o valor do Montante de n Termos é trabalhoso.

A matemática oferece, como um INSTRUMENTO AUXILIAR DE CÁLCULO, a Soma dos Termos de Uma Progressão Geométrica :

$S_{\overline{n|}} = FV = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ que, substituindo $a_1 = 1$ e $q = 1 + i$ e processando,

temos : $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ que é a Tábua II. Temos, então : $FV = pmt \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

a

Substituindo, temos : $1.000 \cdot \left[\frac{(1{,}10)^3 - 1}{0{,}10} = 3{,}310000 \right] =$ R$ 3.310,00

Então : $$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \sum_{t=1}^{n} (1 + i)^t$$

Esta Tábua II – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – na Matemática Financeira é utilizada com esta finalidade :

Soma de n Termos Iguais para calcular Montantes em Investimentos, em Reservas Técnicas para Seguradoras e em Fundos de Pensão.

Tomando da DECLARAÇÃO listamos os TIPOS de aplicações financeiras, ali mencionados que funcionam sob as regras de MONTANTES :

- **De 1 Termo : Iguais ou Distintos – $(1 + i)^n$ – Tábua I**
  - Caderneta de Poupança – n aplicações
  - Títulos Públicos ou Privados – n aplicações
  - Empréstimos – MODALIDADE TRÊS – n empréstimos
  - Fundos de Investimentos

- **De n Termos Iguais – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – Tábua II**
  - Caderneta de Poupança
  - FGTS
  - Fundos de Investimentos
  - Fundo de Previdência
  - Rendas Certas
  - Fundos de Pensão

Obs.: Todo o mercado financeiro Nacional e Mundial.

Importante :

A legislação brasileira pela :

- SÚMULA 121 do STF de 13.12.1963 proíbe esta capitalização de juros – mensal, etc, anual

  e pelo

- O Decreto nº 22.626 de 07.04.1933 pelo seu artigo 4º, na 1ª parte, proíbe a capitalização mensal ou seja, proíbem as regras de MONTANTE.

As Leis dos Homens não DERROGAM as Leis da Matemática.

● **VALOR ATUAL – que fundamenta no DESCONTO COMPOSTO –** $\mathbf{\frac{1}{(1+i)^n}}$ – Tábua IV

(PV na HP12C) e $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ – Tábua V

e, na sua definição, diz :

" Chama-se Valor Atual de uma renda a soma dos valores atuais de seus Termos "

Tomando-se uma renda de Termos Diferentes – $\mathbf{\frac{1}{(1+i)^n}}$ – Tábua IV, temos :

Valor Atual = $a_{\overline{n|}}$ = PV = $\mathbf{\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^3}}$ ou

$a_{\overline{n|}}$ → Simbolismo da matemática financeira em 1960

PV = $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ quando os Termos (Receitas Operacionais, Prestações) forem iguais.

→ Tábua V

Esta Tábua V provém da seguinte dedução, vinda do Juro Composto:

$C = A \cdot (1+i)^n$, sendo $A = C \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$

A → PV

C → FV

O DESCONTO COMPOSTO – D – é assim descrito :

D = C – A ; substituindo A, temos :

$D = C - C \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ e processando temos :

$$D = C \cdot \frac{(1+i)^n - C}{(1+i)^n} = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$$

multiplicando ambos os Termos por i , temos :

$D = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ Tábua V – Desconto Composto

Este Desconto Composto – D – calcula o VALOR DO JURO de cada prestação.

(ver no exemplo do Sistema Francês de Amortização)

Graficamente, temos :

PV = Desconto Composto

PV = 0 — 1 — 2 — 3

$$a \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + a \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + a \cdot \frac{1}{(1+i)^3}$$

não existe, pois você não pede empréstimo e paga no mesmo ato

a – é o valor do Termo ou Renda quando os Termos são diferentes

Este gráfico é para Análises de Investimento, quando os Termos são Distintos, para calcular o PV.

PV = Desconto Composto

PV = 0 — 1 — 2 — 3

$$a \cdot \frac{n \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tábua III

a – é o valor do Termo ou Renda quando os Termos são iguais

Este gráfico é para Análises de Investimento, quando os Termos são Iguais, para calcular o PV.

Nestas Análises de Investimentos calcula-se :

- A rentabilidade de projetos e a taxa interna de retorno – i
- O Valor do Fundo de Comércio

E é aqui que aplicamos o Método do Fluxo de Caixa Descontado.

Ou seja, o Método do Fluxo de Caixa Descontado é composto de Termos Iguais – $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ e de Termos Distintos – $\frac{1}{(1+i)^n}$

Como vemos, a Progressão Geométrica não é necessária neste ambiente do VALOR ATUAL.

E o Sistema Francês de Amortização ?

Para definir o Sistema Francês de Amortização, tomaremos o exercício aqui analisado :

n = 3 ; i = 10,00% ; a = R\$ 1.000,00 ; PV = ?

Na Análise de Investimentos com n Termos Iguais :

0 — 1 — 2 — 3

$$\sum \text{Receitas}\ (1+2) = 3.000,00 = \frac{1.000,00}{1,10} + \frac{1.000,00}{(1,10)^2} + \frac{1.000,00}{(1,10)^3} \quad \text{– Tábua IV –} \quad \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$PV = 2.486,85^1 = 909,09 + 826,44 + 751,32$$

ou

$$PV = 2.486,85^{1} = 1.000,00 \cdot \frac{(1{,}10)^{3} - 1}{0{,}10 \cdot (1{,}10)^{3}} = 2{,}48685199$$

→ Tábua V

No Sistema Francês de Amortização :

$$PV = 2.486,85 = 1.000,00 \cdot \left(\frac{(1{,}10)^{3} - 1}{0{,}10 \cdot (1{,}10)^{3}} = 2{,}48685199 \right)$$

Cálculos dos valores das prestações e dos valores dos juros de cada Prestação :

	0	1	2	3
Σ das Prestações (3 = 1+2) = 3.000 =		1.000,00	1.000,00	1.000,00
Valor do Empréstimo [1] = 2.486,86 =		<u>909,10</u> +	<u>826,45</u> +	<u>751,31</u>
		$\frac{1.000}{1,10}$ +	$\frac{1.000}{1,21}$ +	$\frac{1.000}{1,331}$
Valor do Juro [2] = 513,14 =		90,90	173,55	248,69

$$D = 1.000,00 \cdot \left(\frac{(1+i)^{n} - 1}{i\,(1+i)^{n}} \right) = \underbrace{C \cdot i}\ \ \frac{1.000 \cdot (1{,}10) - 1}{0{,}10\,(1{,}10)} \quad \frac{1.000 \cdot (1{,}10)^{2} - 1}{0{,}10\,(1{,}10)^{2}} \quad \frac{1.000 \cdot (1{,}10)^{3} - 1}{0{,}10\,(1{,}10)^{3}}$$

Saldo Devedor	-	**909,10**	**1.735,54**	**2.486,86**
		3ª prestação	**2ª prestação**	**1ª prestação**

Plano de Amortização da Modalidade QUATRO

Quantidade Parcelas	Valor da Prestação	Amortização	Valor do Juro	Saldo Devedor
-	-	-	-	2.486,86
1ª	1.000,00	751,31	248,69	1.735,54
2ª	1.000,00	826,45	173,55	909,10
3ª	1.000,00	909,10	90,90	-
TOTAL	3.000,00	2.486,86	513,14	-

- O Valor da Prestação vem do cálculo :

$$pmt = PV \cdot \frac{n \cdot (1+i)^{n}}{(1+i)^{n} - 1} \quad \text{– Tábua III}$$

→ valor do empréstimo / financiamento

→ valor da prestação

- Cálculos dos valores dos juros :

Em cada prestação a taxa de juro do período financeiro incide sobre o Saldo Devedor de cada período financeiro.

Ver neste site na TRILHA : Pericia Judicial / Contratos de Empréstimos e Financiamentos / Professores os artigos :

- Progressões Geométricas e o Estudo da Matemática Financeira
- Tabela Price – Verdades que Incomodam

Como vemos o Método do Fluxo de Caixa Descontado é aplicável à Análises de Investimentos e ao Sistema Francês de Amortização.

O Investidor (no caso o Agente Financeiro), matematicamente, faz as mesmas Análises de Investimento para um projeto e para uma empresa ou pessoa física, quando empresta ou financia um bem (imóvel, veículo, etc) para uma empresa ou uma pessoa física.

Didática

A matemática, a exemplo das demais matérias, para ser assimilada, tem que ser apresentada com :

Didática – uma ramificação da pedagogia que tem como finalidade, usar métodos e técnicas na aplicação do ensino.

A palavra vem do grego que significa arte ou técnica de ensinar.

A metodologia é o estudo dos métodos, isto é, o estudo dos caminhos para se chegar a um determinado fim.

A metodologia é a explicação detalhada e exata de toda a ação desenvolvida no (caminho) do trabalho de pesquisa (de textos internet).

A Matemática Financeira precisa de DIDÁTICA, a partir da sua REVISÃO HISTÓRICA, já que o Sr. Richard Price – no século XVIII – utilizou MONTANTES, aplicando as

Tábuas I – $(1 + i)^n$, II – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$, para calcular as Reservas Técnicas para os produtos PECÚLIOS e RENDAS CERTAS para a sua seguradora e a VI – $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

para calcular o valor de aposentadoria – ANNUITY.

Aqui no Brasil, na DECLARAÇÃO de Julho de 2004, Autores, Professores, confirmam esta utilização pelo Sr. Price e denominam estas Três Tábuas de Tabela Price ou Sistema Francês de Amortização, como segue :

> “ declaramos que a fórmula utilizada para o cálculo das prestações, nos casos de empréstimos ou financiamentos em parcelas iguais ... e que no **Brasil é também conhecida por Tabela Price ou Sistema Francês de Amortização é construída com base na Teoria de Juros Compostos (ou Capitalização Composta) ...**
>
> A Capitalização Composta é a base dos cálculos utilizados nas operações de empréstimos, financiamentos e seguros, nas aplicações em caderneta de poupança, títulos públicos e privados, FGTS, fundos de investimentos, fundos de previdência, fundos de pensão, títulos de capitalização ... ”.

Comentamos : Todas estas aplicações referem-se à cálculos de MONTANTES e aplicam as Tábuas I – $(1 + i)^n$ e a auxiliar Tábua II – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ sendo que, o item empréstimos, financiamentos refere-se à MODALIDADE TRÊS.

A afirmação : “ para o cálculo das prestações, nos casos de empréstimos ou financiamentos em parcelas iguais ”, refere-se à Tábua VI – $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ – que calcula valores de benefícios – ANNUITY – aposentadoria e que, nestes annuities, contêm juros compostos e anatocismos.

O Sr. Richard Price estudou isto no seu livro, no século XVIII.

NUNCA estudou o Sistema Francês de Amortização.

Ver este livro neste site na Trilha : Os Livros do Sr. Richard Price / Observations on Reversionary Payments (Annuities) – Benefícios.

Complemento

As Origens das SEIS Tábuas Financeiras :

- **Do Juro Composto** – $C_n = C_o \cdot (1+i)^n$ – **Tábua I – $(1+i)^n$**

  De sua dedução para o Desconto Composto :

  Para 1 Termo

  $$C = A \cdot (1+i)^n \therefore A = C \cdot \frac{1}{(1+i)}$$ – **Tábua IV** – $\frac{1}{(1+i)^n}$

  Para n Termos

  D = C – A que processando temos :

  Desconto Composto

  $$D = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$ – **Tábua V** – $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

  Deduzindo a Tábua V, temos : – **Tábua III** – $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

  Obs.: Calcula o valor de prestações

- **Da Soma dos Termos de Uma Progressão Geométrica :**

  $$S_{\overline{n|}} = FV = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ **que, substituindo $a_1 = 1$ e $q = 1 + i$ e deduzida,**

  encontramos : – **Tábua II** – $\frac{(1+i)^n}{i}$

  Da Tábua II – $FV = pmt \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ = Montantes

  deduzida, temos : $pmt = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$ – **Tábua VI** – $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

  Obs.: Calcula o valor de benefícios

RESUMO :

Tábua I – $(1+i)^n$ – Calcula MONTANTE de 1 Termo – Modalidade TRÊS

Tábua II – $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – Calcula MONTANTE de n Termos Iguais

Tábua III – $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – Calcula o Valor da Prestação em empréstimos / financiamentos
Modalidade QUATRO – Desconto Composto

Tábua IV – $\frac{1}{(1+i)^n}$ – Calcula o Valor Atual de empréstimos de 1 Termo
Modalidade UM – Desconto Composto

Tábua V – $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ – Cálculo do Valor Atual de empréstimos / financiamentos de n Termos Iguais
Modalidade QUATRO – Desconto Composto

$\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

Tábua VI – – Cálculo do Valor de Benefícios em Fundos de Pensão No Valor do Benefício contém Juro Composto e Anatocismo