Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements, d'ou résultent :°1 des formes d'emprunts moins onéreuses [...]

RECHERCHES

SUR

LES RENTES, LES EMPRUNTS

ET LES REMBOURSEMENS.

RECHERCHES

SUR

LES RENTES, LES EMPRUNTS ET LES REMBOURSEMENS.

D'où résultent, 1°. Des formes d'emprunts, moins onéreuses à l'emprunteur, & en même temps plus avantageuses aux créanciers accumulateurs, que ne le sont les différentes formes d'emprunts publics employées jusqu'à présent. 2°. Des conversions de remboursemens, qui réunissent ces deux avantages, surtout, lorsque le débiteur renonce à emprunter de nouveaux capitaux.

PAR M. DU VILLARD.

A PARIS,

Chez l'Auteur, rue Poupée, N°. 6, & chez les principaux Libraires.

A GENEVE,

Chez FRANÇ. DUFART, Imprimeur-Libraire.

M. DCC. LXXXVII.

Imprimé sous le privilège accordé à l'Académie Royale des Sciences de Paris.

EXTRAIT
DES RÉGISTRES
DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES;

Du 2 Septembre 1786.

NOUS, Commiſſaires nommés par l'Académie, M. COUSIN & moi, avons examiné un Ouvrage intitulé :

Recherches ſur les Rentes, les Emprunts & les Rembourſemens; par M. DU VILLARD.

Cet ouvrage renferme une théorie des Emprunts rembourſables par des annuités conſtantes ou variables, viagères ou à terme fixe.

L'Auteur, en faiſant uſage des formules connues, y applique pluſieurs méthodes qui en facilitent le calcul & lui donnent, avec moins de travail que par les méthodes ordinaires, des ſolutions plus approchées.

Il a de plus, dans la ſolution des différentes queſtions qu'il traite, eu égard à une circonſtance qu'on néglige ordinairement dans ces calculs. C'eſt que lorſqu'un emprunt n'eſt pas au taux commun des emprunts, il eſt très-poſſible que celui qui a prêté & qui reçoit chaque année des rembourſemens ſucceſſifs & partiels de ſon capital, ne trouve pas toujours à les replacer au même taux que celui de l'emprunt. Il réſulte de cette obſervation que, le *denier* payé par l'emprunteur reſtant le même, la distribution de ces remboursemens successifs peut être plus ou moins avantageuse pour le prêteur ; d'où l'on peut conclure, qu'en choisissant la distribution la plus favorable, l'emprunteur peut réellement trouver à emprunter à un *denier* moindre.

L'Auteur détermine, pour le cas des annuités constantes à terme fixe, le nombre d'années auquel correspond le *maximum* de cet avantage pour le prêteur.

La partie de l'ouvrage où il s'occupe de développer les conséquences qui résultent de cette hypothèse est la plus étendue & celle qui lui appartient le plus entièrement.

Nous croyons que la publication de cet ouvrage peut être utile, qu'il contient des vues nouvelles sur la solution de plusieurs questions ; que la partie analytique annonce des connoissances étendues & l'habitude de manier le calcul avec facilité & avec adresse, & qu'ainsi il mérite l'approbation de l'Académie, & d'être imprimé sous son privilège.

Ce deux Septembre mil sept cent quatre-vingt-six. Signé le Marquis DE CONDORCET & COUSIN.

Je certifie le présent Extrait conforme à son original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 2 Septembre 1786.

le Mis. De Condorcet.

Secrétaire perpétuel de l'Académie.

Le Privilège est aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.

AVERTISSEMENT.

ON trouvera dans cet ouvrage quelques résultats que je n'aurois pu découvrir ni exposer sans algèbre ; mais j'ai donné beaucoup d'exemples en nombres, afin que les personnes qui ne sont pas accoutumées au calcul littéral, passant à ces exemples, puissent vérifier mes résultats par le calcul ordinaire. * Le travail en sera long à la vérité, & à cet égard, comme à beaucoup d'autres, on exprimeroit bien foiblement les avantages de l'algèbre, si l'on disoit quelle est à l'arithmétique ce que celle-ci est au calcul sur les doigts. Quoiqu'il en soit, bien persuadé du reste qu'on n'attribuera pas à l'ouvrage comme un défaut, ce qui lui est nécessaire ; j'ai crû cet Avertissement d'autant plus à propos qu'un fort petit nombre des personnes, auxquelles cet ouvrage peut être utile, sont exercées à l'algèbre.

Ce n'est cependant point à cette science qu'il faut s'en prendre, si elle n'est pas universellement répandue, & je voudrois pouvoir faire sentir combien il seroit utile qu'elle le fût. Mais le sujet que je traite, est trop circonscript, pour qu'on puisse s'attendre à voir les exemples les plus frappans de l'application des mathématiques aux matières d'intérêt. Cependant, je crois pouvoir faire juger, que celui qui se voue aux finances, a pour le

* Les personnes qui ne savent pas l'algèbre, pourront commencer par le N°. IV.

moins autant besoin d'algèbre, que celui qui se voue au génie a besoin de géométrie, quoiqu'il n'y ait que celui-ci en faveur duquel on ait fondé des écoles publiques, pour l'instruire dans la partie des mathématiques qui lui est nécessaire. Je fais voir en particulier, dans l'ouvrage que je présente au public, qu'un mathématicien exercé à ces matières, travaillant sous les ordres du Ministre des finances, auroit pu, dans bien des occasions, faire emprunter à l'Etat les mêmes sommes qu'il a empruntées ci-devant, en lui faisant économiser plusieurs millions, sans diminuer aucunement l'attrait offert aux prêteurs, ni leur avantage réel.

Je conviens que la vérité de cette assertion ne tombe pas aisément sous le sens, & que même, au premièr coup d'œil, elle paroit absurde. Mais c'est précisément à de tels résultats que les mathématiques peuvent seules atteindre ; quoiqu'une fois trouvés, rien ne soit plus facile que de les vérifier.

Au reste, ce petit essai a été fait pour précéder un autre ouvrage ; & l'approbation dont l'Académie des sciences m'a honoré, les encouragemens flatteurs, qu'un Ministre attentif aux moindres efforts, qui ont pour but la prospérité publique, a daigné m'obtenir de Sa Majesté ; versant dans mon ame une nouvelle ardeur, me font d'autant plus regretter d'être obligé de le livrer aussitôt au public, avec toutes ses imperfections.

RECHERCHES

RECHERCHES
SUR LES RENTES,
LES EMPRUNTS ET LES REMBOURSEMENS.

EXPOSITION.

I. SI l'on ne veut pas rembourser un capital tout-à-la-fois avec les intérêts, on peut en rembourser d'abord la quantité a, ensuite la quantité b, puis successivement les quantités $d, e, f, g, \ldots\ldots u$, jusqu'à l'entière extinction de la dette.

On peut rembourser un capital avec ses intérêts par des paiemens successifs.

Soit donc un capital quelconque c à rembourser avec les intérêts annuels au i pour 1, & soit fait $1 + i = q$.

On devroit pour la première année ci pour les intérêts; & si l'on paie a, ce qui sera donné à compte du capital sera $a - ci$; ainsi il sera encore dû $c - (a - ci)$ ou $cq - a$.

On devroit au bout de la seconde année $(cq - a)q$; & si l'on paye b, il restera dû pour l'année suivante $cq^2 - aq - b$.

On devroit au bout de la troisième année $(cq^2 - aq - b)q$; & si l'on paye d, il restera dû $cq^3 - aq^2 - bq - d$.

Et en général, au bout de t ans, il resteroit dû

$cq^t - (aq^{t-1} + bq^{t-2} + dq^{t-3} + eq^{t-4} + \ldots\ldots + u)$.

Je ſuppoſe ici que l'intérêt eſt composé ; parce que toute perſonne qui fait valoir un capital, ſoit dans ſon propre commerce, ſoit dans celui des autres, ajoute au moins au bout de chaque année l'intérêt au capital, & le fait fructifier avec lui. Je ſuppoſerai de même que l'eſcompte eſt composé & pris comme il faut (1).

---

(1) Je dis *comme il faut ;* car j'ai reconnu qu'il y a quatre différentes manières d'eſcompter, qu'il eſt néceſſaire d'employer tour-à-tour dans certains cas. En effet, que l'on demande quelle eſt la valeur y d'une ſomme m, payable au bout du temps t, le denier de l'argent étant i ?

1°. Si l'on eſcompte à la manière uſitée entre Négocians pour des temps courts, en prenant l'eſcompte en dedans de la ſomme & à intérêt ſimple, on a $y = m(1 - it)$; méthode qui fait, par exemple, que les *remiſes* coutent réellement plus de proviſion aux commettans que les *traites*, quoique le tant pour 100 ſoit le même ; qui réduiroit à zero les plus grandes ſommes payables au bout du temps $t = \frac{1}{i}$ (= 20 ans ſi l'intérêt eſt à 5 pour 100) ; & qui peut abuſer quelques perſonnes lorſque le temps eſt plus court.

2°. Si, en prenant l'eſcompte en-dedans de la ſomme, on compte à intérêt composé, on a $y = m(1 - i)^t$; ou pour mieux dire, cette formule fait voir à quelle ſomme m montera le capital y au bout du temps t, lorſqu'on aura employé ce capital à eſcompter d'année en année des ſommes correſpondantes à ſes valeurs ſucceſſives, & cela ſelon la manière uſitée.

3°. Si l'on prend l'eſcompte en-dehors, & que l'on compoſe l'intérêt, ce qui eſt la bonne manière, on a $y = \frac{m}{(1+i)^t}$.

4°. Si, dans cette troiſième manière, on prend l'intérêt ſimple on a $y = \frac{m}{1 + it} = \frac{m}{i\left(\frac{1}{i} + t\right)}$.

Or, les quantités a, b, d, e, *&c.* peuvent être telles & en tel nombre que la dette soit réduite à zero, c'est à-dire, que $cq^t - (aq^{t-1} + bq^{t-2} + dq^{t-3} + \ldots + u)$ $= o$, ce que nous supposerons.

Si l'on construit ces équations en prenant t pour les abcisses, & y pour les ordonnées, on trouvera que la première est à la ligne droite, la seconde & la troisième sont à des logarithmiques, & la quatrième à une hyperbole entre ses asymptotes dont la puissance est $\frac{m}{i}$, & dont la distance de l'origine des abcisses au centre est $\frac{1}{i}$. Et ces figures une fois décrites un peu en grand, on pourra, au moyen d'une échelle & d'un compas, répondre à toutes les différentes questions que l'on propose sur les intérêts avec autant de précision & avec plus de célérité que par l'arithmétique.

Ou bien soit un cercle $np\,ms$ divisé en autant de parties égales que l'on voudra, lesquelles représentent l'unité de temps ou l'année. Si an représente une somme, que ah, ak, ag représentent les montans de cette somme avec ses intérêts simples au bout de 1, 2, 3, &c. ans, & que ab, ac, ad, &c. représentent les résidus de cette même somme an après en avoir prélevé les escomptes à la manière ordinaire des Négocians, mais pour 1, 2, 3, &c. ans d'échéance; la courbe qui en résultera sera la *spirale d'Archimede*; les ordonnées ayant pour expression $y = s\ (1 + it)$ en faisant t positif & négatif. Fig. I.

Mais si l'on décrivoit la spirale hyperbolique à l'équation $y = \frac{s}{1 + it}$, les ordonnées à la partie $n\ e\ u$ indiqueroient les résidus de la somme an, lorsqu'on en auroit prélevé comme il faut l'escompte à intérêt simple, & feroient faire à la courbe une infinité de tours autour du centre sans qu'elle y arrivat jamais. Les ordonnées à la partie $n\ r$ représenteroient le montant du capital an & des profits que feroit le Banquier, si l'on escomptoit à long terme selon la manière usitée dans le commerce; & cette partie se projetteroit à l'infini, tellement que lorsqu'on auroit $t = \frac{1}{i}$ (ce qui dans cette

De plus les mêmes quantités a, b, d, &c. peuvent être égales, croiſſantes ou décroiſſantes ſelon toutes ſortes de loix.

II. Si elles ſont égales & annuelles, ce ſera ce que

---

figure eſt l'arc de cercle $n\,p\,m$, & la ſoutangente conſtante $a\,T$ de la courbe) l'ordonnée $y = az = \infty$.

Quant aux autres équations $y = s\,(1 + i)^t$ elles donnent des ſpirales logarithmiques qui ont leurs lieux entre les deux ſpirales dont je viens de parler.

Je ſuppoſerai auſſi dans cet ouvrage que l'intérêt pour une portion $\frac{1}{n}$ d'année eſt calculé comme il faut, & qu'il eſt égal à $q^{1:n} - 1$, & non à $\frac{i}{n}$, comme cela ſe pratique mal-à-propos. Car, pour donner une idée des écarts produits par cette différence dans la manière de calculer, ſuppoſons qu'une maiſon de banque établie depuis 30 ans ait eu conſtamment pour un million en compte courant avec divers particuliers; & qu'au bout de ces 30 ans elle veuille rendre tous ſes dépôts avec leurs intérêts au 5 pour 100. Si les Créanciers ont réglé leurs comptes au bout de chaque année, ce commerce leur devra $1000000 \,.\, (1{,}05)^{30} = 4321942^{tt}, 375$. Mais ſi les Créanciers avoient réglé leurs comptes tous les trois mois en ajoutant les intérêts au capital, à raiſon de $\frac{5}{4}$ pour 100 ou de $1\frac{1}{4}$ pour les trois mois, la maiſon de commerce leur devroit $1000000 \,.\, (1 + \frac{0{,}05}{4})^{30 \cdot 4} = 4440213^{tt}, 38$. Par où l'on voit qu'elle auroit à leur payer 118271^{tt} de plus que ſi l'on n'avoit réglé les comptes qu'au bout de chaque année; ce qui ne feroit pas arrivé, ſi l'on avoit calculé comme il faut l'intérêt des trois mois. Cette différence peut devenir énorme à proportion du temps, de la grandeur du capital & du taux de l'intérêt; & d'autant plus que la portion de l'année ſeroit priſe plus petite. Au reſte, le plus grand montant que cette manière de calculer pourroit produire au bout du temps t, ſeroit $c\,(1 + \frac{i}{\infty})^{t.\infty} = c\,e^{it}$, e étant l'on appelle des *annuités*, l'équation deviendra

$$cq^t - a(q^{t-1} + q^{t-2} + q^{t-3} + \cdots\cdots + q^0) = o,$$ Prix d'une annuité.

ou $cq^t = \frac{a(q^t - 1)}{i} = M.$ (2).

---

le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$. Et l'intérêt annuel y pour 1 auquel un Banquier devroit emprunter pour que l'intérêt $y\,dx$ d'une portion infiniment petite de l'année, pris à la manière ordinaire du commerce, & s'accumulant à chaque moment infiniment petit, ne fit au bout de l'année que le i pour 1, doit être $y = \infty\,[(1+i)^{1:\infty} - 1] =$ Log. hyp. $(1+i)$.

Cette manière fautive de calculer l'intérêt a encore singulièrement lieu dans les règles de compagnie par temps, lorsqu'il s'agit de partager les profits faits au denier i entre plusieurs associés, qui ont mis ou ôté des fonds à différentes époques. On éviteroit des erreurs quelquefois considérables si l'on traitoit l'intérêt comme composé.

(2) On remarquera en passant que la quantité $\frac{q^t}{i}$ qui entre dans la formule $\frac{a(q^t-1)}{i}$ est la somme de l'accumulation d'une portion infiniment petite de la rente depuis un temps infini jusqu'au temps $(t-1)$, ou que

$$\frac{q^t}{i} = \left\{ \frac{1}{q^\infty} + \frac{1}{q^\infty}q + \frac{1}{q^\infty}q^2 + \cdots + \frac{1}{q^\infty}q^\infty + 1 \cdot q + q^2 + \cdots + q^{t-1} \right\}$$

ou ce qui revient au même que $\frac{q^t}{i}$ est la somme de tous les états annuels par lesquels a du passer l'élément de l'unité avant que de devenir $= q^{t-1}$ par la fructification des intérêts composés; tandis que la quantité $\frac{1}{i}$ qui entre aussi dans la formule $\frac{a(q^t-1)}{i}$ est la somme d'accumulation de cet élément de l'unité jusqu'au temps où la fructification de cet élément de rente est devenu $= 1$. Or la formule $\frac{a(q^t-1)}{i}$ fait retrancher $\frac{1}{i}$ de $\frac{q^t}{i}$, parce qu'on ne veut avoir la somme d'accumulation que depuis le temps où l'on a *une fois* la rente, puisqu'elle n'est pas payée avant ce temps-là.

De ces deux équations l'on en tire dix-huit autres, au moyen desquelles si de ces cinq quantités M, c, a, i, t, trois sont données, on peut successivement déterminer les deux restantes. (Cela fait en tout 20

On remarquera encore que le prix c d'une annuité a étant égal à la somme de tous les états auxquels chaque année de la rente est réduite par l'escompte jusqu'au temps t auquel elle expire ; si l'on prenoit l'escompte à la manière ordinaire entre Négocians on trouveroit

$$c = a(1-i) + a(1-2i) + a(1-3i) + \ldots + a(1-ti) = \frac{at[2-(t+1)i]}{2}$$

La supposition $a(1-i)^t$ donneroit

$$c = a(1-i) + a(1-i)^2 + a(1-i)^3 + \ldots + a(1-i)^t = \frac{a[1-(1-i)^t](1-i)}{i}$$

& la supposition $\frac{a}{1+it}$ donneroit la suite harmonique

$$c = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{1+2i} + \frac{a}{1+3i} + \ldots\ldots + \frac{a}{1+ti}$$

dont la somme très-approchée est

$$a\left\{\begin{array}{l} \dfrac{L.\,hyp.(1+it)}{i} + \dfrac{1}{1+it}\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2.6.(1+it)} + \dfrac{i^3}{4.30.(1+it)^3} - \dfrac{i^5}{6.42.(1+it)^5}\right. \&c. \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2.6} - \dfrac{i^3}{4.30} + \dfrac{i^5}{6.42} - \&c. \end{array}\right.$$

Si l'on suppose l'intérêt $i = \frac{5}{100}$; la constante $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2.6} - \frac{i^3}{4.30} + \&c.$ fera $= -0{,}4958343737$; & si l'on fait $a = 100^{tt}$, $t = 100$ ans ; on aura pour le prix de 100^{tt} de rentes égales payables pendant 100 ans, selon cette manière de calculer à intérêts simples ;

$c = 3542^{tt}, 25726$; tandis que la formule $c = \frac{a(q^t - 1)}{i}$ donneroit

$c = 1984, 7910$; la formule $c = \frac{a[1-(1-i)^t](1-i)}{i}$ donneroit

$c = 1888, 7513$; & la formule $c = \frac{at[2-(t+1)i]}{2}$ donneroit

la quantité négative $c = -15250^{tt}, 0000$.

équations qui résultent de la double somme des combinaisons de 5 objets pris 3 à 3, on a $\frac{5-2.5-1.5}{1.2.3}.2=20$)

III. Les quantités a, b, d, &c. sont nommées rentes viagères, si le fond c ayant été fourni par un certain nombre de personnes, ces rentes, destinées à rembourser ce fond avec les intérêts, décroissent par les morts successives des Rentiers, & finissent par s'éteindre totalement avec eux.

Or, toutes les tables de mortalité nous présentent une suite de périodes pendant chacune desquelles le nombre annuel des morts est constant. Dans ce cas soit N le nombre des Rentiers constituans, n celui des Rentiers vivans au commencement d'une de ces périodes, t le nombre d'années de cette période, m le nombre constant des morts dans cette période pendant l'intervalle qui s'écoule entre deux paiemens consécutifs. Le prix actuel c de la rente viagère r payable pendant la première période aux seuls vivans restans à chaque époque des paiemens seroit

Prix d'une rente viagère.

$$c=\frac{r}{N}\left\{\frac{n-m}{q}+\frac{n-2m}{q^2}+\frac{n-3m}{q^3}+\ldots\ldots+\frac{n-tm}{q^t}\right\}$$

Or, cette suite se décompose en deux parties; la première, $\frac{rn}{N}\left\{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{q^t}\right\}$ dont la somme $=\frac{rn}{N}\cdot\frac{1}{q^t}\cdot\frac{q^t-1}{i}$, est la valeur de tn annuités r constantes & égales. La seconde partie de cette suite représente la portion de ces annuités dont les morts ne jouiront pas, & qu'il faut, par conſéquent, défalquer du prix ci-deſſus ; cette partie eſt $= -\frac{mr}{N}\left\{\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\ldots+\frac{t}{q^t}\right\}$ dont la ſomme eſt $+\frac{mr}{Niq^t}\left(t-q\frac{(q^t-1)}{i}\right)$; ainſi

$$c=\frac{r}{Niiq^t}\left\{mti+(ni-mq)(q^t-1)\right\}.$$

Tel ſeroit le prix d'une rente décroiſſante chaque année de l'aliquote conſtante $\frac{m}{N}$. Mais dans le cas d'une rente entièrement viagère, il faudra répéter cette formule avec les attentions néceſſaires autant de fois qu'il y a de périodes dont le nombre des morts eſt conſtant, & écrivant par-tout $n+\frac{1}{2}m$ à la place de n ſi l'on veut que, ſelon la manière uſitée, les Héritiers des morts reçoivent une partie de rente proportionnelle au temps qu'ils ont vécu dans le courant de l'année (3). On trouveroit par de ſemblables moyens

(3) Autrement, ſoit KgB la courbe de mortalité dont AK eſt le nombre des naiſſans ; ſoit KfB la logarithmique pour l'eſcompte d'une ſomme auſſi $= AK$; KeB cette même logarithmique modifiée par la courbe de mortalité, comme il convient pour que la totalité des réſidus de la ſomme AK, ſoit le prix c d'une rente viagère $AK = r$ ſur des enfans à leur naiſſance.

Soit $AD = x$; $Dg = y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(c^{-x:k} - c^{-x:n}\right)$ équation à la courbe de mortalité. $Df = \frac{AK}{q^x} = \frac{r}{q^x}$;

$ED = z = \frac{Nr}{q^x}\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - \frac{mr}{q^x}\left(c^{-x:k} - c^{-x:n}\right)$; on aura

$$c = r\cdot\frac{1}{N}\int zdx = r\int\frac{dx}{q^x}\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - \frac{mr}{N}\int\frac{dx}{q^x}\left(c^{-x:k} - c^{-x:n}\right)$$

le

le prix d'une rente viagère ſur deux, trois, ou pluſieurs têtes ; ce qu'il ſuffit ici d'avoir indiqué.

Prenant donc l'intégrale, ajoutant la conſtante & réduiſant, je trouve

$$c = r\left\{\frac{1}{t^2(Lq)^3}\left\{(1-tLq)^2+1\right\} - \frac{m}{N}\left\{\frac{k}{1+kLq} - \frac{n}{1+nLq}\right\}\right\} -$$

$$-\frac{r}{q^x}\left\{\frac{1}{t^2(Lq)^3}\left[\left(1-(t-x)Lq\right)^2+1\right]\right\} +$$

$$+\frac{mr}{N}\left\{\frac{k}{(eq^k)^{x:k}(1+kLq)} - \frac{n}{(eq^n)^{x:n}(1+nLq)}\right\}$$; pour le prix d'une rente viagère r payable à des enfans depuis leur naiſſance juſqu'au temps x.

Mais le prix de la même rente ſur un enfant naiſſant, lorſque cet enfant devra jouir de cette même rente pendant tout le reſte de ſa vie depuis qu'il aura atteint l'âge x, ſeroit égal à la ſurface totale de la courbe combinée KEB, moins la portion de la ſurface dont l'abciſſe eſt $= x$, le tout diviſé par N. Or, pour avoir la ſurface totale, il faudroit faire $x = t = 96$ ans ; ainſi le prix de la rente viagère ſera dans ce cas,

$$c = \frac{Nr}{q^x t^2 (Lq)^3}\left\{\left(1-(t-x)Lq\right)^2+1\right\} +$$

$$+mr\left\{\frac{k}{(eq^k)^{t:k}(1+kLq} - \frac{n}{(eq^n)^{t:n}(1+nLq)}\right\} -$$

$$-\frac{2Nr}{q^t t^2 (Lq)^3} - mr\left\{\frac{k}{(eq^k)^{x:k}(1+kLq)} - \frac{n}{(eq^n)^{x:n}(1+nLq)}\right\}$$, le tout diviſé par N.

Enfin il faudroit multiplier le tout par q^x & le diviſer par $N \times \ldots$ $\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(e^{-x:k} - e^{-x:n}\right)$ ſi l'on vouloit que c ou le prix de la rente r ſur une tête ne fut payé que lorſque cette tête ſera âgée de x ans : ce qui eſt une nouvelle formule pour trouver les prix d'une rente viagère ſur un âge quelconque.

Rentes viagères fur un affemblage de têtes.

IV. Suppofons des rentes viagères conftituées fur des têtes de tout âge, & que l'intérêt i d'après lequel chacune

---

J'ai fuppofé l'équation à la courbe de mortalité $y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(e^{-x:k} - e^{-x:n}\right)$, parce que M. Lambert a trouvé que celle-ci $y = 1000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left(e^{-x:13,682} - e^{-x:2,43114}\right)$ donnoit avec une précifion étonnante la loi de mortalité pour Londres; e étant le nombre dont le log. Hyp. eft l'unité; & il m'a paru qu'un léger changement la rendroit propre à repréfenter la loi de mortalité pour tout autre pays.

On voit que cette équation eft compofée d'une parabole & de deux logiftiques. Le premier terme qui eft parabolique a fait tirer à M. Lambert cette conclufion, que le genre humain mouroit de la même manière qu'un vafe cylindrique fe vuide par un orifice fait à la bafe. Les deux autres termes ont beaucoup de rapport avec l'expreffion du réfroidiffement des corps, puifque la logiftique y fert de bafe. Cette courbe a d'ailleurs mille autres propriétés fort curieufes, que j'ai raffemblées dans l'ouvrage que je propofe ci-après par foufcription.

Je remarquerai encore que les valeurs de N, m, n, k, &c. font telles que les formules ci-deffus de la rente viagère ont plufieurs termes qu'on peut négliger vu leur petiteffe; la dernière fe réduit pour un grand nombre des premières valeurs de x à

$$c = \frac{\frac{r}{t^2(Lq)^3}\left\{\left(1-(t-x)Lq\right)^2 + 1\right\} - \frac{mrkq^x}{N(eq^k)^{x:k}(1+kLq)}}{\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - \frac{m}{N}\left(e^{-x:k} - e^{-x:n}\right)};$$ & les

prix qui réfulteront de ces différentes formules feront tels qu'on pourra payer, outre la rente dûe aux têtes vivantes, la partie proportionnelle au temps que celles qui font mortes ont vécu dans le courant de l'année dont on paie la rente. Car pour que ces prix fuffent tels que les Héritiers euffent droit à la rente annuelle entière, il faudroit que le nombre qui repréfente la furface de la courbe fut égal à celui de ces rentes en particulier a été calculée eſt le même que celui du commerce ordinaire, on peut dire que la condition des prêteurs pris en maſſe eſt égale à celle de l'emprunteur; car celui qui ſeroit intéreſſé ſur chaque tête rentée (4), & qui auroit eu ſoin d'accumuler la rente avec les intérêts auroit après la mort de toutes ces têtes le montant de ſon capital avec tous les intérêts. Mais plu-

---

qui repréſente la ſomme de ſes ordonnées diſtantes de l'unité, ce qui n'a jamais lieu dans la même courbe, attendu que la ſomme des ordonnées eſt toujours en général

$$= \int z dx + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} \cdot \frac{dz}{2dx} - \frac{1}{30} \cdot \frac{d^3 z}{2.3 dx^3} + \frac{1}{42} \cdot \frac{d^5 z}{2.3.4 dx^5} \dots + \text{la conſtante.}$$

(4) C'eſt de cette manière que les Banquiers Génevois ont rendu fort avantageuſes aux Prêteurs les rentes viagères ſur une tête; & de plus il les ont rendues très-commerçables. Voici à-peu-près comment ſe ſont faites les dernières conſtitutions : après avoir obſervé la loi de mortalité des femmes & filles de Genève, dont la bonne conſtitution, la ſaine manière de vivre, l'état d'aiſance & la ſtabilité dans le pays, ſont les plus probables; ils ſe ſont aſſemblés avec les médecins, ont chargé chacun d'eux de nommer d'entre les perſonnes auprès deſquelles ils étoient appelés, les jeunes filles qui ayant déjà paſſé par les épreuves de la petite vérole & de la rougeole paroiſſoient de la meilleure conſtitution, d'en délibérer même entr'eux, & d'en former une liſte ſur laquelle il n'y eut plus qu'un choix à faire rélativement aux autres conſidérations. Ces choſes étant exécutées, les Banquiers ont choiſi à chaque nouvel emprunt 30 têtes ſur ces liſtes, ont conſtitué ſur chacune d'elles un certain nombre de contrats, pour en réunir les rentes annuelles, & les partager enſuite proportionnellement entre tous ceux qui voudroient s'y intéreſſer. Enfin, pour en faciliter la vente, ils ont comme ſubdiviſé la ſomme totale des contrats avec le Roi en un plus grand nombre d'actions de plus ou moins grande valeur à volonté, dont les reconnoiſſances ſont faites en

Sur une tête.

sieurs personnes placent aussi sur leur propre tête; alors, leurs rentes sont constantes pendant toute leur vie; la rente viagère qui est la même que la rente viagère au premier paiement, dans le cas ci-dessus, est égale à l'annuité que l'Emprunteur devroit payer pour rembourser le prix de la rente avec les intérêts au i pour 1, au bout d'un certain temps. Si ce rentier vit moins que ce temps, il perd; s'il vit davantage, il gagne.

Remarques.

V. Je relèverai en passant une manière erronée d'envisager ces gains & ces pertes. L'on dit communément que les morts hâtives des Rentiers procurent un gain, & les morts tardives une perte à l'Emprunteur. Puisque d'après notre supposition, il se trouve que l'Emprunteur, en dernier résultat, n'a ni perdu ni gagné, il n'est pas exact de lui imputer des gains & des pertes particulières ensuite des pertes & des gains que font les Prêteurs. Mais c'est uniquement entre ceux-ci que roule ce commerce de gains & de pertes, tellement que le gain que fait un Prêteur en vivant long-temps est pris sur les pertes qu'ont supporté les Rentiers qui sont morts les premiers. Il en est donc des simples rentes viagères comme des tontines où les Rentiers héritent les uns des autres.

L'occasion m'invite à faire une autre remarque pour détruire une apparente contradiction que ces calculs présentent. D'après leur fondement il est certain que l'Emprunteur ne perdra pas; cependant il se trouve que

---

leurs noms; répondant seulement, mais sous hypothèque, aux Intéressés de payer sans délai & au prorata les rentes viagères qu'ils auront reçues.

le temps pendant lequel il devroit payer la rente pour rembourſer complettement le Prêteur eſt moindre que la vie moyenne de celui-ci, qui en pourroit conclure que ce placement lui eſt avantageux ; concluſion contradictoire avec la nullité de perte pour l'Emprunteur. Mais le Prêteur devroit *ſeulement* conclure, qu'il y a un plus grand nombre de chances pour lui que contre lui : or le nombre des chances pour & contre doit ſe combiner avec la grandeur abſolue des gains & pertes éventuels pour déterminer l'avantage réel d'une telle ſpéculation.

VI. Si les rentes viagères n'étoient calculées que ſur le taux d'un intérêt ordinaire, cela ne ſuffiroit pas pour entraîner autant de Prêteurs que l'Emprunteur pourroit en deſirer. De-là eſt réſultée la néceſſité d'augmenter le taux naturel du viager ſans en augmenter le prix ; tellement qu'il exiſte des rentes viagères de 9, 10 pour 100, & au-delà ſur les têtes les mieux choiſies. Mais on a lieu d'être effrayé de la charge que ſupporte l'Emprunteur lorſque l'on trouve par le calcul, (formule $t = \frac{L.a - L.(a-ci)}{L.(1+i)}$) que

Intérêt ſupporté par l'emprunteur.

Pour payer l'annuité 10 pour 100.				*Pour payer l'annuité 9 pour 100.*			
Pendant			Il faut faire valoir	Pendant			Il faut faire valoir
Ans.	*Mois.*	*Jours.*		*Ans.*	*Mois.*	*Jours.*	
14	2	14	. . au 5 pour 100.	16	7	14	. . au 5 pour 100.
15	8	21	. . . . 6. . . .	18	10	8	. . . . 6. . . .
17	9	16	. . . . 7. . . .	22	2	23	. . . . 7. . . .
20	10	28	. . . . 8. . . .	28	6	18	. . . . 8. . . .
26	8	19	. . . . 9. . . .	30	5	16	. . . . $8\frac{1}{4}$ . . .
33	2	28	. . . . $9\frac{1}{2}$ . . .	35	5	5	. . . . $8\frac{1}{2}$ . . .
48	9	12	. . . . $9\frac{9}{10}$ . . .	42	8	20	. . . . $8\frac{3}{4}$ . . .
72	6	16	. . . . $9\frac{99}{100}$. . .		&c.		&c.
96	7	22	. . . . $9\frac{999}{1000}$. . .				

Dès-lors on voit trois classes de personnes s'intéresser à ces rentes.

Première classe de Prêteurs en rentes viagères.

VII. En premier lieu les personnes qui ayant peu de fortune & peu de moyens pour en acquérir, mais possédant cependant un certain fonds, ont besoin d'accroître leurs revenus, ces personnes peuvent mettre à l'écart une partie de leurs rentes pour reformer leurs capitaux même plusieurs fois, & malgré cela jouir cependant d'une plus grande aisance. Supposons en effet un emprunt remboursable par 30 annuités de 10 pour 100; un particulier qui s'y intéresseroit n'auroit qu'à mettre à l'écart $1\frac{1}{2}$ pour 100 chaque année, & l'accumuler à 5 pour 100 d'intérêts *composés*, il auroit, au bout de 30 ans, reformé le capital à peu de chose près, & auroit cependant joui de $8\frac{1}{2}$ pour 100 de rente, au lieu de 5 pour 100 qu'il retiroit auparavant de son Banquier: que s'il pouvoit mettre un peu plus en fructification, il trouveroit son capital augmenté au bout de 30 années, ainsi qu'on le voit dans cette table (5)

(5) On peut facilement étendre cette table, & en dresser pour d'autres annuités au moyen de la formule $n = \frac{ap(q^t - 1)}{i}$ dans laquelle p est la portion aliquote de la rente a pour 1, qu'il faut faire fructifier, afin d'avoir reformé n fois son capital. J'ai converti les fractions décimales, que cette formule donne, en fractions approchées dont les dénominateurs n'excèdent pas 100, au moyen d'une table fort commode qu'un de mes amis a eu la complaisance de me faire, & que je donnerai dans mes élémens avec la bonne théorie qu'il y a joint.

S'il faifoit fructifier au 5 pour 100 chaque année environ	*Il trouveroit fon capital reformé.*	*& auroit joui chaque année*
1 $\frac{49}{97}$ pour 100 pris fur la rente, ou 0,0150514	une fois	de 8 $\frac{48}{97}$ pour 100 de rente
1 $\frac{52}{59}$ ou 0,0188142	une fois & un quart.	. . 8 $\frac{7}{59}$ . . . . . .
2 $\frac{25}{97}$ ou 0,0225771	1 $\frac{1}{2}$.	. . 7 $\frac{72}{97}$ . . . . . .
2 $\frac{26}{41}$ ou 0,026340	1 $\frac{3}{4}$	. . 7 $\frac{15}{41}$ . . . . . .
3 $\frac{1}{97}$ ou 0,0301028	2 fois	. . 6 $\frac{96}{97}$ . . . . . .
3 $\frac{17}{44}$ ou 0,0338546	2 $\frac{1}{4}$	. . 6 $\frac{27}{44}$ . . . . . .
3 $\frac{45}{59}$ ou 0,0376274	2 $\frac{1}{2}$.	. . 6 $\frac{14}{59}$ . . . . . .
4 $\frac{5}{35}$ ou 0,0413902	2 $\frac{3}{4}$.	. . 5 $\frac{31}{35}$ . . . . . .
4 $\frac{50}{97}$ ou 0,0451542	3 fois	. . 5 $\frac{47}{97}$ . . . . . .
5 pour 100 . . .	3 $\frac{47}{59}$ ou 3,32195. .	. . 5 pour 100 . . .
6 $\frac{2}{97}$ ou 0,0602056	4 fois	. . 3 $\frac{95}{97}$ . . . . . .
7 $\frac{51}{97}$ ou 0,075257	5 fois.	. . 2 $\frac{46}{97}$ . . . . . .
9 $\frac{3}{97}$ ou 0,0903084	6 fois.	. . . $\frac{94}{97}$ . . . . . .
10 pour 100. . .	6 $\frac{47}{73}$ fois	. . . 0 pour 100. . .

Temps au bout duquel ils ont reformé leur capital.

VIII. En fecond lieu de telles annuités doivent être encore très-avantageufes aux Banquiers & à tous ceux qui jouiffent d'un crédit affuré ; car, pouvant compter prefque auffi long-temps qu'ils le défirent, fur une bonne partie de l'argent qu'ils ont reçu en dépôt, & dont ils paient le 5 pour 100, ils ont en pur bénéfice, s'ils achètent de ces rentes, l'excédent de l'annuité fur l'intérêt qu'ils paient & fur la portion qu'ils mettent en réferve pour réformer le capital. En effet, foit a l'annuité reçue pour une livre de prêt ; p l'aliquote de rente que l'on met en fructification : e ce que chaque unité de rente coûte de frais de perception ; j pour un

Seconde claffe de Prêteurs.

l'intérêt auquel l'on accumule, & i celui que l'on paie pour l'unité de capital empruntée & mise en rente; on aura reformé n fois le capital au bout du temps $t = \frac{L.[nj+ap(1-e)-i]-L.[ap(1-e)-i]}{L.(1+j)}$. Au moyen de quoi il est aisé de voir que si la rente est de 10 pour 100, (ou que $a = 0{,}1$); que si l'on a emprunté un capital $(= 1)$ dont on paie chaque année le 5 pour 100, (ou $i = 0{,}05$), qu'il y ait 2 pour 100 de frais sur la rente, (ou que $1 - e = 0{,}98$); on aura reformé $(n =)$ une fois le capital au bout de $t = 14^{\text{ans}}\ 3^{\text{mois}}\ 4^{\text{jours}}$, en accumulant tout le restant $[ap(1-e) = 0{,}0098]$ de la rente au $(j =)$ 5 ½ pour 100; & au bout de $13^{\text{ans}}\ 11^{\text{mois}}$ si on l'accumule au 6 pour 100. Que si tout restant de même, on n'accumuloit que les ¾ $(= p)$ de la rente, on seroit libéré de la dette au bout de $22^{\text{ans}}\ 6^{\text{mois}}\ 10^{\text{jours}}$ en accumulant au 5 ½; & au bout de $21^{\text{ans}}\ 9^{\text{mois}}\ 3^{\text{jours}}$, en accumulant au 6. Ainsi, non-seulement on auroit payé chaque année les intérêts du capital emprunté & joui dans le second cas du quart de la rente, mais on auroit encore au bout de ces temps de quoi rembourser le capital, & l'on jouiroit ensuite sans aucune charge de toute la rente (6). On voit bien que si nous joignons

---

(1) Le Banquier s'acquittera un peu plutôt, si au lieu de payer chaque année l'intérêt du capital emprunté, il a fait des billets solidaires, comprenant la somme & le montant des intérêts composés qui seroient dûs à l'échéance du billet; parce que faisant valoir à un plus haut taux qu'il ne paie, il feroit plus que gagner cette différence d'intérêt sur le capital; il la gagneroit sur les intérêts dûs qui fructifient aussi comme capital.

le

à un tel avantage celui que ces perſonnes ont de vendre elles-mêmes les contrats, après en avoir joui pendant long-temps, à un beaucoup plus haut prix qu'elles ne les ont achetés il, n'y aura pas lieu de s'étonner de l'énorme fortune que quelques-unes ont faite dans les rentes.

XI. Vient enſuite une troiſième claſſe de Prêteurs; ſavoir, celle des Capitaliſtes qui cherchent à faire valoir le mieux poſſible leurs fonds. Ils peuvent acheter de ces contrats pour en accumuler les rentes de la même manière qu'ils accumuloient les intérêts de leurs capitaux & y faire un profit; mais leurs avantages ne ſont point comparables à ceux des autres claſſes : car il s'en faut bien qu'accumulant leurs rentes dans ce commerce à un intérêt ſi fort au-deſſous de celui que l'Emprunteur ſupporte, ils puiſſent porter leurs profits auſſi haut que les ſacrifices de l'Emprunteur ſemblent le promettre. Enfin, ce qui paroîtra peut-être bien paradoxal, il m'a paru que l'Emprunteur pourroit améliorer & ſa condition & celle des Prêteurs, en convertiſſant les rembourſemens par rentes viagères, en quelques autres formes de rembourſement; & c'eſt-là ce que je me propoſe de développer dans cet ouvrage. Mais l'on doit bien ſe reſſouvenir qu'en diſant ceci, je n'ai en vue que le nombre de contrats ou parties de contrats que des particuliers ont acquis dans le but de faire valoir le mieux poſſible leurs capitaux, & que je mets ſeulement dans cette troiſième claſſe de Prêteurs toute perſonne qui, n'ayant pas beſoin de ſa rente entière pour vivre, en accumule une partie pour

Troiſième claſſe de Prêteurs.

But de cet ouvrage.

refaire le plus grand nombre de fois possible son capital. Or toute personne sage qui a placé des fonds en rente viagère est pour quelque chose dans ce cas ; & cela contribue à rendre le sujet de ce mémoire d'autant plus intéressant.

Recherches sur les profits que peuvent faire les Capitalistes qui placent en rentes.

Ordre à suivre dans cette recherche.

X. Je supposerai d'abord que quelqu'un ait mis en rente viagère sur sa tête, afin de faire rentrer la rente viagère dans la classe des annuités ; ou plutôt je supposerai que la rente est une annuité constante & payable aussi long-temps qu'on voudra. Après quoi, je passerai aux rentes viagères qui décroissent annuellement par la mort des Rentiers. J'examinerai même les profits que donneroient des annuités croissantes comme dans les tontines ; & enfin, j'exposerai quelques moyens pour rendre ces sortes de remboursemens plus profitables aux uns & aux autres.

Annuités constantes.

Condition des Prêteurs s'ils replacent au même intérêt que l'emprunteur supporte.

XI. Si les Prêteurs pouvoient placer la rente qu'ils retirent, au même intérêt que le Débiteur est censé faire valoir chaque résidu annuel ; à quel intérêt l'argent emprunté se trouveroit-il avoir été placé à la fin des paiemens ? Cet intérêt sera égal à celui qui, pour le nombre d'années auxquelles s'étendent communément les annuités équivalentes aux rentes viagères, ne diffère pas du 1 pour 100 de l'annuité elle-même ; & c'est-là par conséquent un fort intérêt. (*Voyez la table du N°. VI*). Supposons, par exemple, un emprunt remboursable par des annuités de 10 pour 100, & que le Débiteur finisse ses paiemens au bout de 0, 1, 2, 3, 4, &c. années : l'Emprunteur & le Prêteur auront chacun, par l'hypothèse, fait fructifier leur argent comme on le voit dans la seconde colonne de la table première qui est à la fin de ce mémoire.

XII. Mais le Prêteur ne pouvant replacer la rente au même intérêt que l'Emprunteur supporte, supposons qu'il l'accumule avec les intérêts sur intérêts au 5 pour 100 ; on trouvera qu'en s'intéressant dans un emprunt remboursable par des annuités de 10 pour 100, il aura réellement fait valoir ses capitaux, comme on le voit dans la cinquième colonne de la table qui est fort différente de la seconde (7). S'ils placent à un moindre intérêt.

XIII. En effet, soit proposé de trouver à quel intérêt on

(7) Les colonnes 7 & 9 sont pour les cas où l'on ne feroit pas fructifier les intérêts de la rente. La figure 3 qui suit la table fait encore mieux voir ce qui arrive dans ces différens cas. Pour cet effet, j'ai pris sur la ligne indéfinie *AB*, des abcisses qui représentent les temps pendant lesquels l'annuité doit être payée ; & après avoir élevé perpendiculairement à l'extrémité de chaque abcisse des ordonnées proportionnelles à l'intérêt auquel les capitaux sont placés selon les 4 différentes suppositions dont je viens de parler ci-dessus, j'ai eu ces 4 courbes dont Fig. 3.

La première *ckh* répond aux 1re. & 2me. colonnes de la Table.
La deuxième *clo* . . . . . . 3me. & 5me. . . . .
La troisième *csm* . . . . . . 6me. & 7me. . . . .
La quatrième *cin* . . . . . . 8me. & 9me. . . . .

Enfin, la table algébrique qui est avant cette figure renferme colonne par colonne les équations générales qui ont produit les nombres de la première table, & les courbes dont je viens de parler.

Régle pour trouver leur profit.

place ſon argent, lorſqu'on le place à fonds perdu pour une certaine annuité, payable ſeulement pendant un certain temps donné? On cherchera le montant m de toutes ces annuités perçues, au moment où l'on ceſſe de les recevoir, ce qu'on trouvera par cette formule $m = \frac{a(q^t - 1)}{i}$; on cherchera enſuite à quel intérêt auroit dû être placé le capital primitif pour être monté à cette dernière ſomme pendant la durée t de l'annuité a, ce qu'on trouvera par cette autre formule $y = -1 + \sqrt[t]{m:c}$ La ſolution ſera complette, & l'on pourra dire que le placement en annuité, ainſi qu'il a été fait, équivaut à un ſimple placement, pendant la durée de l'annuité ſuppoſée, au taux que l'on vient de déterminer. C'eſt d'après ces principes qu'ont été conſtruites les quatrième & cinquième colonnes de la table ci-jointe.

Temps où les Prêteurs ſe trouvent avoir placé au plus grand intérêt.

XIV. Il ſe préſente ici un réſultat curieux & important, qui paroît d'abord un paradoxe, & qui ſera pris pour une abſurdité par toute perſonne qui ne pourra ou ne voudra pas me ſuivre avec attention. Ce paradoxe, c'eſt qu'il y a ici un *maximum*; c'eſt-à-dire, une certaine durée de l'annuité telle que pour cette durée l'intérêt demandé eſt plus fort que pour aucune autre, enſorte qu'en augmentant de même qu'en diminuant la durée de l'annuité ainſi fixée, l'intérêt demandé diminuera.

En effet, les annuités & leurs intérêts compoſés s'accumulant vaudront bientôt le capital primitif (ce qui aura lieu environ après 9 ans, ſuivant les ſuppoſitions ordinaires d'intérêts); je dis donc que ſi l'annuité s'éteignoit au bout de 9 ans, c'eſt comme ſi je plaçois pendant 9 ans mon capital au 0 pour 100. Mais paſſé ce terme, le montant des annuités ſurpaſſant le capital primitif, il équivaut à celui que j'aurois eu en plaçant ce capital à un certain intérêt ſur intérêt ou *anatociſme* au-deſſus de zéro; & il eſt facile de voir que cet intérêt ſera très-foible ſi l'annuité ne dure que 10 ans, un peu moins foible ſi elle dure 11 ans; ainſi de ſuite. Voilà donc cet intérêt croiſſant à meſure que croît la durée de l'annuité. Mais il ne croîtra pas ſans fin, il y aura une époque où il diminuera; car, ſuppoſons qu'il ſoit devenu actuellement *plus grand* que l'intérêt *ordinaire* auquel fructifient les annuités : le montant des annuités s'accroîtra l'année ſuivante, 1°. de ſon intérêt *ordinaire*, 2°. de l'annuité *conſtante* qui ſera payée; d'un autre côté, le capital fructifiant ſuppoſé égal au montant des annuités au commencement de l'année, s'accroîtra ſeulement de ſon intérêt; mais ce taux d'intérêt étant *plus fort* que celui auquel fructifie le montant des annuités donnera néceſſairement une fois une augmentation annuelle égale à la double augmentation que reçoit le montant des annuités; ce moment arrivé, ſi ce taux reſtoit le même, les augmentations qu'il apporteroit à ſon capital l'emporteroient ſur les augmentations que reçoit le montant des annuités : il faudra donc le baiſſer. Il y aura donc un *maximum*, puiſqu'après avoir fait monter ce taux, il faudra le faire deſcendre; & la table fait voir à quel époque tombe ce *maximum*, lorſque l'annuité étant de 10 pour 100 l'intérêt auquel on l'accumule eſt au 5.

Mais il eſt aiſé de comprendre que ce *maximum* aura lieu toutes les fois que l'annuité ſera d'une grandeur qui, vu le temps de ſa durée, ne pourroit être payée ſans perte, à moins que l'Emprunteur ne fit valoir à un intérêt plus fort que celui auquel les Rentiers accumulent (8).

Quant à la détermination de ce *maximum* de profit, du temps auquel il a lieu, & des annuités qui le donnent : la voici.

Détermination de ce temps.

XV. Si l'on demande quel eſt l'intérêt y pour *un*, auquel on ſe trouve avoir placé ſon capital, lorſqu'on reçoit de ce capital une rente a pour *un*, que l'on replace à meſure à i pour *un* au bout du temps t? La réponſe à cette queſtion eſt évidemment contenue dans l'équation $\frac{a(q^t-1)}{i} = (1+y)^t$, équation à la courbe *clo*, fig. 3.

Maintenant t étant variable, on demande quelle valeur il doit avoir pour que y ſoit un *maximum*? Pour cela, qu'on différencie l'équation, on aura

$$aq^t dt Lq - i(1+y)^t dt L(1+y) = ti(1+y)^{t-1}dy;$$

faiſant $dy=o$, on a $\frac{aq^tLq}{i} = (1+y)^tL(1+y)$, équation qui, diviſée par l'équation donnée, laiſſe pour quotient

celle-ci $\frac{q^tLq}{q^t-1}\,[=L(1+y)] = \frac{1}{t}L[\frac{a}{i}(q^t-1)]$, ou

(8) Je donnai pour la premiere fois l'idée de ce *maximum* à la ſuite d'un proſpectus pour un cours public de mathématiques à l'uſage du commerce, publié à Genève en 1784.

$q^{\frac{tq^t}{q^t-1}} = \frac{a(q^t-1)}{i}$ $[=(1+y)^t=Q^t]$; équation de laquelle on peut très-facilement tirer t par les séries (9), mais je préfère obtenir cette valeur de la manière suivante.

Dans l'équation donnée $\frac{a(q^t-1)}{i} = (1+y)^t = Q^t$ ou $\sqrt[t]{\frac{a}{i}(q^t-1)} = Q$, on fera telle supposition que l'on

---

(9) On peut tirer de plusieurs manières cette valeur de t par les séries. Par exemple, soit $\frac{1}{q^t} = x$; d'où $t = \frac{-Lx}{Lq}$. L'équation à résoudre sera $(1-x)\,L\left(\frac{a}{i}\right) + (1-x)\,L(1-x) + x\,Lx = 0$; or,

$$(1-x)\,L(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n.n+1} + \text{\&c.}$$

& xLx, ou $xL[1-(1-x)] = x\left\{-(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} - \cdots \frac{(1-x)^n}{n} - \text{\&c.}\right.$

ou en développant chaque terme & sommant les n premiers par le calcul des différences finies

$$xLx = x\left\{-\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}\right) + nx - \frac{n.n-1}{2.2}.x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3.3}.x^3 - \frac{n\ldots n-3}{2.3.4.4}.x^4 \cdots \mp \frac{x^n}{n}\right\}$$

ainsi en nommant h la somme de la série harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}$ on aura

$$\text{Log. hyp.}\left(\tfrac{a}{i}\right) = \left[1+h+L\left(\tfrac{a}{i}\right)\right]x - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(\tfrac{n.n-1}{2.2} - \tfrac{1}{2.3}\right)x^3 - \left(\tfrac{n\ldots n-2}{2.3.3} + \tfrac{1}{3.4}\right)x^4 + \left(\tfrac{n\ldots n-3}{2.3.4.4} - \tfrac{1}{4.5}\right)x^5 - \cdots \pm \left(\tfrac{1}{n} \mp \tfrac{1}{n.n+1}\right)x^{n+1}$$; ou $N = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 +$ &c. &

$$x = \frac{N}{A} - \frac{BN^2}{A^3} + \frac{2B^2-AC}{A^5}.\,N^3 + \frac{5ABC-A^2D-5B^3}{A^7}.\,N^4 + \text{\&c.}$$

soit donc $a = 0{,}1$; $i = 0{,}05$; & $n = 7$;

nous aurons N ou $L\left(\frac{a}{i}\right) = \text{Log.hyp.}\,2 = 0{,}69314718$; $1+h = 3{,}592858\ldots$

$$\& \; t = \frac{-L(0{,}1617234 + 0{,}0457672 + 0{,}0157061 + 0{,}0057724 \ldots\ldots)}{L(1{,}05)} =$$

$= \frac{-L0{,}228969}{L1{,}05} = \frac{0{,}6402232}{0{,}0211893} = 30,\ 21$, ce qui est assez près de 30, 38 qui est la vraie valeur de t.

voudra pour t, pourvu que la valeur de y qui en résultera soit positive ; c'est-à-dire, que l'on prendra $t > \frac{L(1+\frac{i}{a})}{Lq}$. On substituera la valeur de Q qui résultera de cette supposition de t dans l'équation suivante $x = \frac{L(aLq) - L(iLQ)}{LQ - Lq}$, pour laquelle tous les logarithmes peuvent être pris dans les tables vulgaires, on fera de nouveau $t = x$ dans l'équation $\sqrt[t]{\frac{a}{i}(q^t - 1)} = Q'$; on substituera la nouvelle valeur de Q' qui en résultera dans l'équation $x' = \frac{L(aLq) - L(iLQ')}{LQ' - Lq}$ on aura déjà une valeur très-approchée du temps du *maximum* de profit d'intérêt ; & on en approchera aussi près que l'on voudra en répétant l'opération.

Par exemple, soit $a = 0,1$; $i = 0,05$; & $t = 22$ d'où $Q = 1,063199$; on aura .... $x = 37,2387$

$$Q' = \sqrt[37]{\frac{a}{i}(q^{37} - 1)} = 1,0646737 \; ; \; x' = 31,906$$

$$Q'' = \sqrt[31]{\frac{a}{i}(q^{31} - 1)} = 1,0651546 \; ; \; x'' = 30,40076,$$ qui est à très-peu-près le temps du *maximum* cherché. Cette méthode résulte d'une remarque que je fais ci-après sur une autre courbe.

Autre moyen.

XVI. On pourroit aussi mettre l'équation d'où il faut tirer t sous cette forme $a = \frac{iq^{\frac{tq^t}{q^t - 1}}}{q^t - 1}$, faire différentes suppositions pour t, qui donneront à a différentes valeurs ; après quoi, si l'on vouloit la valeur de t pour une certaine valeur de a déterminée, on la trouveroit

par

par interpolation : car, soit l'intérêt fructifiant de la rente = 0,05, & soit fait successivement $t = 0, 1, 2, 3, 4$, &c. on aura la table suivante.

Temps des *Maxima.*	Pour ces annuités accumulées à 5 pour 100.	*Maxima* de profits d'intérêt.	Temps des *Maxima.*	Pour ces annuités accumulées à 5 pour 100.	*Maxima* de profits d'intérêt.
0	∞	∞ p. 100		p. 100	p. 100
1	278, 596 p. %	178, 596	24	12, 226626	
2	139, 339	69, 0107	25	11, 82903	7, 169
3	92, 9621	43, 1046	27	11, 57728	
4	69, 7528	31, 678	27 ½	10, 883665	
5	55, 852	25, 2805	30	10, 10675	6, 553
6	46, 5948	21, 1976	30 ½	9, 968025	
7	39, 989	18, 3692	35	8, 91377	
8	35, 0422	16, 2972	40	8, 05111	5, 852
9	31, 1121	14, 6804	41	7, 90592	
10	28, 13296	13, 4703	45	7, 40688	
11	25, 62794	12, 4652	49	7, 00368	
12	23, 5451	11, 6384	49,55	6, 95458	
13	21, 78693	10, 9467	50	6, 91532	5, 491
14	20, 28385	10, 3602	60	6, 23416	5, 299
15	18, 9848	9, 857	65	5, 9969	
16	17, 8515	9, 4214	70	5, 80593	5, 174
17	16, 85475	9, 292	80	5, 53006	5, 105
18	15, 9717	8, 706	90	5, 34935	
19	15, 1846	8, 409	100	5, 23027	5, 027
20	14, 4787	8, 1442			
20 ½	13, 842822				
22	13, 267095		∞	5 p 100.	5 p. %
22 ½	12, 999315		(9')		

La note de cette Table est à la page suivante.

Je dis que si l'on recevoit chacune de ces annuités pendant un temps plus long ou plus court que celui qui correspond à chacune d'elles, le profit d'intérêt corrélatif, placé dans la troisième colonne, diminueroit, ce que chacun peut vérifier.

Veut-on maintenant trouver les temps précis qui donnent un *maximum* de profit par des annuités de 6, 7, 8, 9 & 10 pour 100? Prenons, par exemple, l'annuité 10 pour 100.

à 30 ans correspond l'annuité 10,10675
à 30 $\frac{1}{2}$ 9,96802

Différence pour $\frac{1}{2}$ an. 0,13873

Proportion, $\frac{1}{2}$: 0,13873 : : x : 0,10675; d'où $x=0,38474$ qu'il faut ajouter à 30 ans; ainsi des autres.

(9)

Temps des *Maxima*.	Pour ces payemens par semestres accumulés.	
ans.	au 2 & demi pour 100 par 6 mois.	au 3 pour 100 par 6 mois.
$\frac{1}{2}$	275, 219 p 100	275, 8955 p 100
5	27, 59113	27, 68832
10	13, 90031	13, 99482
15	9, 38295	9, 49649
20	7, 158806	7, 296407
25	5, 85153	6, 015126
30	5, 002366	5, 192345
35	4, 414597	4, 630783
40	3, 989762	4, 2316
45	3, 673123	3, 93978
50	3, 43179	3, 72126

XVII. On trouvera au moyen de cette théorie, que les temps des *maxima*,

Pour ces *annuités* accumulées au 5 p. 100.	sont au bout de			*Sommes* accumulées.			*Maxima* d'intérêts.	*Temps* au bout desquels on aura son capital. *sans intérêts.*				*avec intérêts* au 5 p 100.			
	ans	mois	j.	liv.	sols	den.			ans	mois	j.		ans	mois	j.
5 p 100	∞			∞			5 p. 100	A	14	2	14		∞		
6	64	11	8	2732	7	8	5, 22553	B	12	5	2		36	8	21
7	49		15	1392	1	11	5, 51648	C	11		17		25	8	3
8	40	4	7	985	18	2	5, 8350	D	9	11	12		20	1	7
9	34	6	28	792	12	8	6, 16995	E	9		20		16	7	13
10	30	4	18	680	15	4	6, 51600		8	3	21	A	14	2	14
11	27	1	29	608		8	6, 87032		7	8	5	B	12	5	2
12	24	7	9	557	7	1	7, 2308		7	1	20	C	11		17
13	22	5	29	519	6		7, 59652					D	9	11	12
14	20	3	1	472	3	5	7, 9650			(10)		E	9		20

(10) Les lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. donneront lieu à quelques remarques que je laisse faire à mes lecteurs. On trouvera de plus que le temps *A* est aussi celui au bout duquel un capital double, lorsqu'il est placé à 5 pour 100, intérêt composé; que c'est au bout de 22 ans 6 mois 6 jours, & qu'un capital devient triple, en le faisant fructifier au 5 pour 100, & qu'il devient quadruple par la rente de 10 pour 100; qu'au bout de 28 ans 4 mois 29 jours il quadruple par les intérêts composés, & sextuple par la rente de 10 pour 100; qu'au bout de 25 ans 8 mois 3 jours il triple par la rente 6 pour 100, quadruple par la rente 8 pour 100, quintuple par la rente 10 pour 100, &c. &c. On pourra faire mille autres remarques de ce genre.

XVIII. J'ajouterai à cette table (11), que le *maximum* de profit d'intérêt par semestre que pourra donner une

(11)

au bout de			Montant de la rente 4 liv. 10 s. & des intérêts sur intérêts au 2 & demi pour 100 par 6 mois.			Intérêt pr. 6 mois, auquel il faudroit placer 100 l. pour avoir la même somme que ci-contre au bout du même tems.	au bout de			Montant de la rente 4 l. 10 s. & des intérêts sur intérêts au 3 pour 100 par 6 mois.			Intérêt par 6 mois, auquel il faudroit placer 100 liv. pour avoir la même somme que ci-contre au bout du même temps.
an.	m.	j.	liv.	sols	d.		an.	m.	j.	liv.	sols	d.	
8	11	11	100			0,p100	8	7	20	100			0, p 100
16	5	2	224	19	10	2,5	15			214	1	9	2,5698
27	11	3	534	16	6	3,048	18	7		299	19	10	3, p 100
30			611	19	3	3,0652	27	11	3	631	14	9	3,355
33	6		761	7	11	3,0762	30			733	14	9	3,3774
34			784	18	7	M 3,0764	36			1110			3,39950
34	6		809	1		3,0763	36	6		1147	16		M 3,39952
35			833	15	7	3,0760	37			1186	14	9	3,39948
45			1481	3	7	3,0401	45			1995	1	4	3,3818
50			1946	9	4	3,0131	50			2732	15	10	3,3632
60			3304	9	4	2,9578	60			5056	13		3,3234
70			5529	14	2	2,9077	70			9953	15	5	3,2868
80			9176		5	2,8647	80			16834	5	9	3,2556
90			15150	18	7	2,8285	90			30525	10		3,2271
100			24941	10	4	2,7925	100			55253	7	4	3,2076
							500						3,0418
							5000						* 3,0042

* Ainsi de suite, sans pouvoir jamais redevenir 3 sans fraction ; & la courbe *clo*, Fig. 3, a pour asymptote une droite située parallélement au-dessus de l'axe, à une distance égale à la valeur de l'intéret composé auquel on aura accumulé la rente. (*Voyez* la Table algébrique qui précéde la *Planche I.*)

Si au lieu de 4 l. 10 s. on recevoit 5 l. de rente, on auroit

en plaçant au 2 & demi par 6 mois.						en plaçant au 3 par 6 mois.					
an.	mois.	liv.	sols	d.		an.	mois.	liv.	sols	d.	
30		679	19	2	3,2463	31	6	905	19	9	3,5601
30	6	701	19	2	M 3,2465	32		938	10	2	M 3,56055
31		724	10	2	3,2456	32	6	971	13	4	3,5601

annuité constante de $4\frac{1}{2}$ pour 100 par semestre sera $= 3{,}0764$ pour 100 au bout de 34 ans, (nombre rond) si on l'accumule au $2\frac{1}{2}$ pour 100 par 6 mois; ou $= 3{,}39952$ au bout de $36\frac{1}{2}$ ans, si on l'accumule au 3 pour 100 par 6 mois; & si au lieu de $4\frac{1}{2}$ pour 100 on recevoit 5 pour 100 de rentes par semestres, le *maximum* de profit d'intérêt par semestre seroit $= 3{,}2465$ pour 100 au bout de $30\frac{1}{2}$ ans, si on accumuloit la rente au $2\frac{1}{2}$ pour 100 par 6 mois; ou $= 3{,}56055$ pour 100 au bout de 32 ans, si on l'accumuloit à 3 pour 100 par 6 mois. Par où l'on voit que les temps des *maxima* & les profits d'intérêts correlatifs varient, si les valeurs des annuités & de l'intérêt fructifiant varient. En général, plus l'intérêt auquel on placera la rente sera fort, plus le terme du *maximum* sera éloigné; & au contraire, plus l'annuité sera grande, l'intérêt de l'accumulation restant le même, plus le terme de son *maximum* sera court, & la somme accumulée petite. Remarques.

XIX. De plus, il est aisé de voir qu'il n'y a pas lieu d'hésiter sur le choix de deux annuités différentes, payables chacune jusqu'au temps de leur *maximum*, Quoique le temps T pendant lequel on payera la plus petite annuité a, fût plus grand que celui t, pendant lequel on payeroit la plus grande A; car l'on a à comparer ces deux produits $q^{\frac{tq^t}{q^t-1}} . q^{T-t}$ & $q^{\frac{Tq^T}{q^T-1}}$; ou simplement en réduisant, comparer $\frac{t}{q^t-1}$ avec $\frac{T}{q^T-1}$; or ce dernier produit qui est proportionnel à l'accumulation de la plus petite annuité a, est évidemment plus

Choix entre deux annuités pour acquitter le même capital.

petit que le premier $\frac{t}{q^t-1}$, qui eſt proportionnel à l'accumulation de la plus grande annuité A, à meſure que T grandit.

Mais il pourroit y avoir lieu d'opter, ſi la plus grande annuité A ceſſoit d'être payée avant le temps de ſon *maximum* de profit, (ou ſi les deux annuités décroiſſoient différemment) & les limites de ce cas d'irréſolution peuvent être déterminées par la queſtion ſuivante, dont la réponſe eſt facile.

Suppoſons qu'il ſe préſente un emprunt rembourſable par l'annuité a pour 1, & que l'on eſpère qu'il s'en fera une fois un rembourſable par des annuités au A pour 1; après combien de temps (ayant toujours fait valoir ſon argent au i pour 1) ſi cet emprunt ſe fait, & qu'on y mette, aura-t-on auſſi bien fait d'attendre que de ne pas attendre? & le temps n de l'annuité a étant déterminé, quel devroit être le temps x du payement de l'autre annuité A?

On a, $\frac{Aq^t(q^x-1)}{i} = \frac{a(q^n-1)q^{x+(t-n)}}{i}$, d'où

$x = \frac{L.A - L.\left(A - \frac{a(q^n-1)}{q^n}\right)}{L.q}$, & t = *à volonté*. Réſultat qui eſt le même que ſi l'on eût cherché directement la limite du premier cas d'irréſolution, parce qu'il eſt fort égal pour les produits qu'on faſſe valoir ſon capital pendant le temps t avant que de le mettre en rente, ou qu'on faſſe valoir au même intérêt, pendant le même temps, la rente accumulée qui proviendroit de ce capital: toute la différence conſiſteroit en ce que, par la première manière, on seroit plutôt riche que par la seconde.

Soit $i = \frac{5}{100}$; $a = \frac{8}{100}$; $n = 40$; $A = \frac{10}{100}$; on trouvera $x =$ 23 ans 9 mois 5 jours $\frac{5}{9}$: c'eſt-à-dire, qu'il faudroit que l'annuité 10 pour 100 qu'on eſpère, & qui empêche de mettre dans l'emprunt rembourſable par des annuités de 8 pour cent pendant 40 ans, fût payé pendant 23 ans 9 mois 5 $\frac{5}{9}$ jours, pour qu'ayant fait valoir ſon capital, ou ſa rente accumulée, pendant 16 ans 2 mois 24 $\frac{4}{9}$ jours, on eut également bien fait valoir ſes fonds. En effet on trouvera qu'on les auroit également fait valoir au 5 $\frac{5}{9}$ pour 100 environ. Mais au-deſſous de 23 ans 9 mois 6 jours de jouiſſance, on auroit perdu à attendre.

XX. L'équation $a = \dfrac{iq\frac{tq^t}{q^t-1}}{q^t - 1}$ fait auſſi voir une choſe que le bon ſens dicte; c'eſt que les cas du *maximum* de profit s'étendent juſqu'au cas où l'annuité $a = i$, & ne s'étendent pas au-delà ; car alors $t = \infty$; & c'eſt une circonſtance remarquable que les temps des *maxima* de profits d'intérêts que peuvent donner des rentes de 6, 7, 8, 9, 10, 11 & 12 pour 100, qui ſont celles que l'on paye, ſoient compris dans les limites de la vie humaine, le taux ordinaire de l'intérêt étant 4, 5 & 6 pour 100 ; & même ſoit ſi près du terme de la vie moyenne.

Limites du *Maximum.*

XXI. La néceſſité d'admettre dans certaines annuités un *maximum* de profit d'intérêt eſt donc généralement démontrée ; & la table qui eſt à la fin de ce Mémoire nous apprend, en particulier, que ſi l'on place ſon argent aux annuités conſtantes de 10 pour 100 nettes de tous frais & exemptes de diminutions, & qu'on ne puiſſe plus replacer la rente qu'au 5 pour 100 ; le plus haut intérêt auquel on puiſſe eſpérer d'avoir placé ſon argent, combinaiſon faite des deux intérêts, eſt le 6,516 pour 100, ſoit le $6\frac{16}{35}$ pour 100, ce qui a lieu au bout de 30 ans 4 mois 18 jours ; tandis qu'au bout de 100 années de jouiſſance ce profit d'intérêt ſe réduit à 5,7222 pour 100, ſoit à $5\frac{13}{18}$ pour 100, quoiqu'on ait continué de recevoir conſtamment la même rente, & quoique la charge de l'emprunteur déjà fort grande pour payer cette annuité pendant 30 ans, puiſqu'il ſupporte le $9\frac{1}{4}$ pour cent des capitaux dont il a joui, ſoit encore plus grande lorſqu'il la paye pendant 100 ans.

XXII. On pourroit de même voir en interpolant les nombres des 3me & 5me colonnes de la même table, que ſi l'on ne trouve pas dès le moment de l'époque du *maximum* à mieux placer la rente qu'au 5 pour 100, ſoit qu'il ne ſe fît pas de nouveaux emprunts ou autrement, l'on ne ſeroit pas plus avancé pour le profit des intérets.

au bout de environ	qu'on ne l'étoit à	au bout de environ	qu'on ne l'étoit à
$32\frac{1}{2}$ ans.	28 ans	$51\frac{1}{2}$	21 ans
$34\frac{1}{2}$	27	$57\frac{1}{2}$	20
36	26	$65\frac{1}{2}$	19
38	25	$77\frac{1}{2}$	18
$40\frac{1}{2}$	24	97	17
$43\frac{1}{2}$	23		
47	22	∞	14 a. 2 m. 14 j.

quoique les charges de l'emprunteur ſoient extraordinairement différentes.

XXIII.

XXIII. Ou plus exactement & plus généralement, l'équation $\frac{a(q^t-1)}{i} = Q^t$, ou $aq^t - iQ^t - a = 0$, ne donne pour t aucune valeur réelle positive, si Q est plus grand que le *maximum* de profit : mais elle donne pout t une valeur positive, lorsque Q est $<$ que q, & lorsque Q est un *maximum* : & elle donne pour t deux valeurs positives lorsque Q, $>$ que q, est cependant plus petit que le plus grand profit que puisse donner une fois l'accumulation au i pour 1 de la rente a pour 1 (12).

XXIV. Or, ces remarques sont utiles, en ce qu'elles

---

(12) Soit $aq^t - iQ^t - a = z$; & tirant la ligne AB, que t en soit les abcisses & z les ordonnées : on aura dans tous les cas une courbe ; mais dans le premier cas (supposant toujours $a >$ que i) les ordonnées seront toujours négatives, & la courbe n'arrivera jamais à l'axe. Dans le second cas, lorsque Q est un *maximum*, la courbe viendra toucher l'axe ; elle la coupera une fois si Q est $<$ que q, & deux fois si Q, $>$ que q, est plus petit que le *maximum* de profit d'intérêt. Par exemple, soit $Q = 1{,}0627163$; $a = 0{,}1$, & $i = 0{,}05$, on trouvera que $t = 50$, & $t = 21{,}28615$ satisferont également bien à l'équation ; à ces deux valeurs de t la courbe coupera l'axe & la soutangente sera $= 0$.

Si l'on différencie l'équation, & qu'on cherche la plus grande valeur positive de z, on la trouvera en $t = \frac{L(aLq) - L(iLQ)}{LQ - Lq}$; or, quoique cette valeur de t ne soit pas la même que celle qui a lieu lorsque Q est un *maximum*, il est aisé de l'y faire coincider autant que l'on veut, & par là de trouver la valeur de t lorsque Q est un *maximum*, ainsi que je l'ai fait ci-dessus au N°. XV. Si l'on différencie deux fois de suite l'équation, en faisant dx constant & $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, peuvent donner lieu à des économies considérables de rentes pour l'emprunteur, en même temps qu'à de plus grands profits pour les prêteurs ; car il saute aux yeux, par exemple, que passé le terme où le *maximum* de profit d'intérêt a lieu, l'emprunteur pourroit totalement supprimer les rentes qu'il doit payer au-delà de ce terme, pourvu qu'il laissât aux rentiers la faculté de lui reprêter sous les mêmes conditions la somme d'accumulation qu'ils ont faite : par ce moyen il leur soutiendroit le *maximum* de profit d'intérêt, ce qui leur produiroit, par conséquent, au bout d'un temps donné, une somme réellement plus forte que celle qu'ils auroient par l'accumulation de la même rente continuée à perpétuité : l'emprunteur continueroit à la vérité de leur payer le même denier de rente, mais ce ne seroit qu'après avoir reçu de nouveaux capitaux. Cependant on peut faire beaucoup mieux encore, & j'en exposerai quelques moyens après avoir fait observer ce *maximum* dans les rentes viagères constituées sur un assemblage de têtes choisies, & dans quelques autres espèces d'annuités.

Conséquence importante de ce *maximum*

Remarques.

XXV. Si dans l'équation $aq^t - iQ^t - a = 0$, on écrit

---

on aura $t = \frac{L[a(Lq)^2] - L[i(LQ)^2]}{LQ - Lq}$ pour la valeur de l'abcisse correspondante au point d'inflexion qu'a cette courbe ; ce point se trouve ici à l'abcisse 20,9414, mais il n'est pas toujours aussi près du point où la courbe coupe l'axe pour la première fois. Dans ce même exemple, la plus grande valeur positive de z est à $t = 39,2603$.

nq^t à la place de Q^t on aura $t=\frac{La-L(a-ni)}{Lq}$; expreſſion qui ſe réduit à zero, lorſque $n=0$; mais qui devient infinie lorſque $n=\frac{a}{i}$. Donc au bout d'un temps infini, on aura réformé le capital avec tous ſes intérêts i pour 1, autant de fois que ce même intérêt i pour 1 eſt contenu dans la rente, ou dans la portion de rente qu'on accumule. D'un autre côté, l'on a $Q^{\infty}=\frac{a}{i}q^{\infty}$; d'où $Q=q\left(\frac{a}{i}\right)^{\frac{1}{\infty}}$, $(=q)$; ce qui ſignifie que pour obtenir le même réſultat, ou pour avoir autant de fois, au bout d'un temps infini, le montant d'un capital & de ſes intérêts i pour 1 que cet intérêt eſt contenu dans la rente a, il ſuffit de placer tout de ſuite ce capital à un intérêt compoſé j pour 1, qui ſoit plus grand, d'une quantité infiniment petite, que l'intérêt i pour 1 auquel on accumule la rente. Or, au bout d'un certain temps, la rente eſt une addition très-inſenſible en comparaiſon du produit des intérêts d'intérêts (le capital lui-même eſt une quantité aſſez petite); cela pourroit donc nous conduire à comparer ſimplement entr'eux les produits de deux ou de pluſieurs intérêts compoſés différens ; & puiſque nous obſervons qu'une infiniment petite différence dans ces intérêts ſuffit pour produire, au bout d'un temps infini $\frac{a}{i}$ fois, c'eſt-à-dire ici, le double du profit qu'on auroit fait par le plus petit des deux intérêts, nous trouverions que ſi la différence entre ces intérêts étoit finie, l'on obtiendroit au bout d'un temps infini, par le plus grand des deux intérêts, un profit infini par rapport à celui qu'auroit donné le plus petit intérêt ; idée qu'on peut vérifier par le calcul le plus élémentaire (13).

---

(13) En effet, si l'on vouloit savoir à quel intérêt x pour 1 il faudroit avoir placé un capital 1, pour qu'au bout du temps t on eut un montant égal à n fois celui du capital avec ses intérêts au i pour 1, on auroit cette équation $(1+x)^t = n(1+i)^t$, formule par laquelle faisant $n=2$ & $i=0{,}05$, on trouvera que pour qu'un capital devint égal au double du montant de ce même capital au 5 pour 100.

au bout de	Il faudroit le faire fructifier à	au bout de	Il faudroit le faire fructifier à
$t=1$ ans	$x=110$ pour 100	$t=90$ ans	$x=5{,}8118$
$t=10$	$x=12{,}53$	$t=100$	$x=5{,}7303$
$t=20$	$x=8{,}7028$	$t=1000$	$x=5{,}073$
$t=30$	$x=7{,}4542$	$t=10000$	$x=5{,}0073$
$t=40$	$x=6{,}3353$	$t=100000$	$x=5{,}00073$
$t=50$	$x=6{,}4657$	$t=1000000$	$x=5{,}0000724$
$t=60$	$x=6{,}2202$	$t=10000000$	$x=5{,}00000724$
$t=70$	$x=6{,}0449$		
$t=80$	$x=5{,}9137$	$t=\infty$	$x=5$. pour 100.

Supposons encore qu'un Banquier emprunte de l'argent au $0{,}04=i$, qu'il fasse valoir au $0{,}06=j$, soit $k=1+j$, & $1+i=q$; on trouvera que

	Le profit total d'intérêt en ne payant le 4 p. 100 qu'après le temps t est $y=[k^t-q^t+1]^{1:t}-1$	Le nombre de fois que le profit à 2 pour 100 a été fait est $z=\frac{(1+j)^t-(1+i)^t}{(1+j-i)^t-1}$	L'excès du profit d'intérêt en sus du 2 pour 100 est $v=[2+k^t-q^t-(k-i)^t]^{1:t}-2$
si $t=1$	$y=2$, pour 100	$z=1$ fois	$v=0$, pour 100
$t=10$	$y=2{,}7418$	$z=1{,}418016$	$v=0{,}8886$
$t=20$	$y=3{,}5678$	$z=2{,}090786$	$v=2{,}14932$
$t=30$	$y=4{,}2644$	$z=3{,}07498$	$v=3{,}3518$
$t=40$	$y=4{,}7845$	$z=4{,}540167$	$v=4{,}2459$
$t=50$	$y=5{,}1496$	$z=6{,}68808$	$v=4{,}8393$
$t=100$	$y=5{,}8330$	$z=46{,}24721$	$v=5{,}8099$
$t=\infty$	$y=6$, pour 100	$z=\infty$	$v=6$, pour 100

Il est visible que ces différences eussent été plus grandes, si le Banquier empruntant au 6 pour 100 faisoit valoir au 8 pour 100 ; & ce que j'ai dit dans ma note 6 suffit pour rendre raison de ces effets.

Je remarquerai encore en paſſant que ſi l'on fait $Q^t = nq^t = 1$, on aura $t = \frac{L(a+i) - La}{Lq}$, pour le temps où l'on auroit ſimplement reformé le capital ſans intérêt : d'où il ſuit, que ſi la rente a étoit $= i$, c'eſt-à-dire perpétuelle ; & que la jouiſſance dût en être partagée entre deux perſonnes également ; la première ne devroit en avoir la jouiſſance que pendant 14 ans 2 mois 14 jours ; & dès-lors la rente devroit appartenir à la ſeconde perſonne & à ſes héritiers à perpétuité (14).

XXVI. On voit, par la table qui eſt à la fin de ce Mémoire, que ſi l'on ne faiſoit qu'accumuler la rente ſans la placer à aucun intérêt ou qu'on dépensât cet intérêt, on ne laiſſeroit pas d'avoir placé ſon capital à un petit intérêt compoſé qui auroit auſſi ſon point de *maximum*.

Temps du *maximum* lorſque la rente eſt accumulée ſans intérêts.

En effet, l'équation ſeroit alors $at = (1+y)^t$ dont la

(14) Si une annuité quelconque devant être payée pendant le temps T, on vouloit partager le temps total de la jouiſſance entre un nombre m de perſonnes, de façon que l'une ne jouiſſant qu'après l'autre de cette rente, aucune ne perdît d'avoir attendu, ou que ſi chacune voulant vendre ſon droit à cette ſucceſſion, le prix fut le même pour toutes : on trouveroit que le temps t, pendant lequel en doit jouir en général la n^{eme} perſonne, ou ſes héritiers, eſt $t = \frac{L[(m-(n-1))q^T + (n-1)] - L[(m-n)q^T + n]}{Lq}$ équation de laquelle on pourra tirer toute autre quantité inconnue. Soit $T = 40$, $m = 3$, $q = 1{,}05$ & n ſucceſſivement $= 1, 2, 3$; on aura $t = 6$ ans 10 mois 25 jours ; 10 ans 5 mois 26 jours ; 22 ans 7 mois 9 jours : & le prix d'une livre de rente feroit pour chacune de ces perſonnes $= 5$ liv. 14 f. 5 den.

differencielle eſt $adt = (1+y)^t dt L(1+y) + tdy(1+y)^{t-1}$; faiſant $dy = 0$, éliminant y, on a $L.at = 1 = L.e$; d'où $t = \frac{e}{a}$, & $y = (e)^{\frac{a}{e}} - 1 = (2.7182818)^{\frac{a}{2.7182818}} 1$, ce qui eſt le *maximum* cherché ; tellement que ſi $a = 0,1$, on trouvera $y = 0,0374731$, ſoit $3\frac{71}{95}$ pour 100, & $t = 27,182818$ ans. Soit 27 ans 2 mois $5\frac{8}{9}$ jours.

Avec les intérêts ſimples.

XXVII. On trouveroit de même que dans le cas où l'on placeroit la rente à intérêts ſimples, il y auroit un *maximum*, car l'équation eſt $at + \frac{(t-1)ait}{2} = (1+y)^t$. La différencielle eſt $dt[\frac{a}{2}(i(2t-1)+2) - (1+y)^t L(1+y)] = dyt(1+y)^{t-1}$, d'où, faiſant $dy = 0$, l'on tire

$$[i(t-1)+2]\, L.hyp.\left(\frac{at[i(t-1)+2]}{2}\right) = i(2t-1)+2\text{ , ou}$$

$$\left(\frac{at[i(t-1)+2]}{2}\right)^{\frac{i(t-1)+2}{i(2t-1)+2}} = e,$$ équation qui renferme le temps du *maximum* cherché, & qu'on pourroit tirer, ſoit par les ſéries, ſoit autrement. Dans le cas où $a = 0,1$ & $i = 0,05$ on trouvera $y = 5\frac{33}{47}$ p. $\frac{0}{0}$ au bout de 25,0934 ans de jouiſſance ; c'eſt-à-dire, un peu plutôt que dans les deux autres cas, ce à quoi on auroit bien pu ne pas s'attendre.

Annuités croiſſantes ou décroiſſantes.

XXVIII. Si l'annuité croiſſoit ou décroiſſoit chaque année de la quantité conſtante $\frac{am}{N}$; l'intérêt y pour 1, auquel on trouveroit avoir placé ſon capital, lorſqu'on recevroit de ce capital une rente a pour 1, ainſi croiſſante ou décroiſſante, & qu'on accumuleroit à l'intérêt i pour 1, cet intérêt ſeroit exprimé par cette équation $(1+y)^t = \frac{a}{Nii}[(ni \pm mq).(q^t - 1) \mp mti]$; (15) or, si l'on différencie cette équation en faisant t & y variables, on aura pour la détermination du temps au

---

(15) Si l'on vouloit savoir au bout de quel temps l'accumulation d'une rente ainsi croissante ou décroissante donneroit le capital sans intérêts, ou avec les intérêts composés au denier i, on auroit ces deux équations

$\frac{a}{Nii}[(ni \pm mq).(q^t - 1) \mp mti] = 1$, & $\frac{a}{Nii}[(ni \pm mq).(q^t - 1) \mp mti] = q^t$;

ou en faisant pour abréger $\frac{a}{Nii}(ni \pm mq) = P$; & $\frac{a}{Nii} mi = Q$; la première sera $P(q^t - 1) \mp tQ = 1$; & la seconde $(P-1).(q^t - 1) \mp tQ = 1$.

Cela étant, on pourroit facilement trouver la valeur de t par une construction géométrique ; car, soit proposé de construire l'équation $P(q^t - 1) \mp tQ = 1$? On lui fera subir les transformations suivantes ; $\frac{P}{Q}.q^t = \frac{1+P}{Q} \pm t$, ou $Rq^t = S \pm t$, d'où $t = \frac{L.(S \pm t) - L.R}{L.q}$, & ensuite cette proportion $L.q : 1 :: L.(S \pm t) \pm L.R : t$.

Si on a $L.q : 1 :: L.(S+t) - LR : t$.

On prendra sur l'axe d'une logarithmique quelconque, dans laquelle a est l'origine des abcisses, $ab = 1$; $ed = q$; ae sera $= Lq$; on mènera bc parallèle à l'axe ; puis, les diagonales ac, bc ; on fera $af = S$; on mènera fi parallèle à l'axe ; on prendra sur fi, $fg = LR$; & menant gh parallèle à ac ; puis abaissant hik, on aura $hi = t$. En effet, $hk = S+t$, $fi = ak = L(S+t)$, $gi = L(S+t) - LR$ & les triangles ace, gih donnent $Lq : 1 :: L(S+t) - LR : t$. C.. Q.. F... T.. Fig. 5.

Si g tombe en-dedans en g', on mènera $g'h'$ parallèle à cb & $h'i'$ sera $= t$; on auroit $Lq : 1 :: LR - L(S+t) : t$.

Si $Lq : 1 :: L(S-t) - LR : t$; par le point g on mènera gh'' parallèle à ac, ou gh parallèle à be, & $i''h''$ ou $i'''h'''$ sera $= t$; par où l'on voit qu'il y auroit ici deux solutions.

Si dans l'équation on a $+ L(S \pm t)$ & LR en *plus* ; on prendra LR de l'autre côté de f en G.... &c. &c.

bout duquel le profit d'intérêt eſt le plus grand, l'équation ſuivante

$$(1+y)^t dtL(1+y)+(1+y)^{t-1}.tdy=\frac{a}{Nii}[(ni\pm mq)\,q^t\,dtLq\mp midt];$$

Temps du *maximum* d'intérêt pour les prêteurs.

faiſant enſuite $dy=0$, mettant pour $(1+y)^t L(1+y)$ ſa valeur priſe dans l'équation donnée, diviſant le tout par $\frac{adt}{Nii}$ & paſſant des logarithmes aux nombres, on a

$$a=\frac{Nii\,(e)^{\frac{t[(ni\pm mq)q^t Lq\mp mi]}{(ni\pm mq)(q^t-1)\mp mti}}}{(ni\pm mq).(q^t-1)\mp mti};$$ e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité.

On pourroit tirer t par les ſéries; mais comme le calcul eſt trop long, il vaudra mieux faire différentes ſuppoſitions pour t qui donneront à a différentes valeurs; & ſi l'on veut la valeur de t correſpondante au *maximum* de y pour une certaine valeur de a, on la trouvera par interpolation.

Formule rélative à l'emprunteur & remarques.

XXIX. Mais, avant tout, ſoit j l'intérêt que l'emprunteur ſupporte, en payant pendant le temps T l'annuité croiſſante ou décroiſſante; & ſoit $k=1+j$; l'équation qui déterminera les rapports que doivent avoir entr'eux tous les élémens N, n, a, m, &c. du calcul, ſera $k^T=\frac{a}{Nii}[(nj\pm mk).(k^T-1)\mp mTj]$; & il n'y aura de *maximum* pour y que lorſque j ſera $>$ que i; avec cette attention, que dans les annuités décroiſſantes, quelles que ſoient les valeurs de a & de k, mT ne ſauroit être plus grand que n; ſans quoi, il y auroit un temps où les Rentiers, au lieu de recevoir, paieroient;

paieroient ; la plus grande valeur de mT est donc $= n$ (16).

Dans le cas où $N=n$, & où $m=0$, les annuités sont égales & constantes, & l'on retombe dans l'équation que nous avons traitée.

Quant aux annuités ainsi croissantes, quelle que soit la valeur de m ; tant que j sera $>$ que i, il paroît qu'il y aura toujours un *maximum* ; & même l'on peut concevoir que si l'accroissement étoit lui-même variable, il pourroit y en avoir plus d'un.

XXX. Soit fait $N=n=100$ $i=0,05$ $a=0,06$ & $0,1$; on trouvera que

Tables des profits d'intérêts que donneroient certaines annuités croissantes

Le montant de l'accumulation d'une liv. de rente (*croissante* chaque année de 1 pour 100) avec ses intérêts composés au 5 pour cent, est		L'intérêt composé auquel il auroit fallu faire fructifier un capital pour que son montant eût été égal à l'accumulation	
		d'une annuité de 6 pour 100 croissante chaque année de 1 pour 100.	d'une annuité de 10 pour 100 croissante chaque année de 1 pour 100.
au bout ans	liv.		
de 10	13,2193	−2,344 p % *	+2,8302 p %
20	36,0098	+3,927	6,6158
30	74,3910	5,113	* 6,918
40	138,1677	5,43	6,785
50	243,3108	* 5,582	6,592
60	415,8364	5,508	6,402
70	699,1960	5,483	6,256
80	1159,1872	5,446	6,121
90	1911,4757	5,410	6,010
100	3138,1308	5,378	5,917

* On comprend que cet intérêt négatif signifie ici qu'il auroit fallu escompter la somme pour 10 ans, au 2,344 pour 100.

(16) Supposons ce cas ; l'on auroit $m = \frac{n}{T}$, & si l'on faisoit, de

XXXI. Mais prenons la table de mortalité des Tontiniers, recueillie par Mr. De Parcieux, & supposons que mille enfans de l'âge de trois ans ayent chacun sur leur tête une rente $\frac{a}{1000}$ qui, à la mort de chacun d'eux, soit partagée entre tous les autres, comme dans les tontines, & soit accumulée à 5 pour cent; on aura d'après cette table cette suite *croissante* $\frac{aq^{t-1}}{970}+\frac{aq^{t-2}}{948}+\frac{aq^{t-3}}{930}+\frac{aq^{t-4}}{915}+\ldots\ldots+\frac{a}{1}$. Faisant $a=1000$; $q=1,05$, on trouvera que

Le montant de l'accumulation d'une liv. de rente, dans l'origine, & de ses intérêts au 5 p. 100		Et que l'intérêt composé auquel il auroit fallu faire fructifier un capital pour que son montant eût été égal à l'accumulation des rentes						
		4 p. %	5 p. %	6 p %	7 p. %	8 p. %	9 p. %	10 p. %
ans	liv.							
de 3 à 13	13,8711	—6,068	—3,727	—1,853	—0,295	—1,046	+2,243	+3,326
3 à 23	37,7314	+2,079	+3,225	+4,170	+4.976	+5,679	+6,303	+6,865
3 à 33	78,4131	3,884	4,659	5,305	5,840	6,312	* 6,730	* 7,105
3 à 43	146,4893	4,519	5,104	5,584	* 5,992	* 6,346	6,666	6,941
3 à 53	259,7995	4,794	5,262	* 5,646	5,973	6,312	6,507	6,731
3 à 63	449,1661	4,932	5,323	5,643	5,915	6,151	6,359	6,547
3 à 73	769,3165	5,017	5,352	5,627	5,86	6,062	6,240	6,400
3 à 83	1346,3173	5,109	5,402	5,643	5,847	6,024	6,180	6,381
3 à 94	4667,1700	5,915	6,175	6,388	6,568	6,724	6,863	6,986

---

plus, $N=n$, & $T=\frac{q}{i}$; ces valeurs substituées dans l'équation du *maximum* la réduiroit à $L.\left(\frac{at}{q}\right)=L.e$; d'où $t=\frac{qe}{a}$; mais dans cette équation on a $a=\frac{jjk^{q:i}}{\left(j-\frac{ie}{q}\right)\left(k^{q:i}-1\right)+j}$, par la formule rélative à l'Emprunteur. Par exemple, soit $q=1,05$; $k=1,06$; $N=n=100$; on auroit $m=\frac{5}{1,05}$; $T=\frac{1,05}{,5}=21$ ans; $a=14,77126$ pour 100;

Par où l'on voit que les accroiſſemens variables ſont tels que lorſque la première rente eſt $> i$, il y a deux *maxima* de profit d'intérêt, l'un au milieu de la vie, l'autre à la fin.

Double *maximum* dans les annuités croiſſantes comme dans les Tontines.

XXXII. A l'égard des annuïtés décroiſſantes,

Le montant de l'accumulation d'une liv. de rente *décroiſſante* chaque année de 1 pour 100 & de ſes intérêts au 5 pour 100, feroit		L'intérêt compoſé auquel il faudroit faire fructifier un capital pour que ſon montant fût égal à l'accumulation des rentes.				
au bout de		6 p. $\frac{0}{0}$.	7 p. $\frac{0}{0}$.	8 p. $\frac{0}{0}$.	9 p. $\frac{0}{0}$.	10 p. $\frac{0}{0}$.
10 ans	11,93654	−3,3944	−1,8128	−0,46231	+0,71916	+1,78596
20	30,12212	+3,0034	+3,8004	+4,4957	+5,1110	+5,6682
30	58,48670	4,2734	4,8106	5,2781	5,6923	* 6,0642
40	103,43181	4,6695	5,0737	* 5,4250	* 5,7359	6,0147
50	175,38493	4,8197	5,1433	5,4245	5,6731	5,8960
60	290,661	4,880	* 5,1497	5,384	5,5910	5,7766
70	477,836	4,9109	5,1421	5,3430	5,5203	5,6793
80	784,662	4,9326	5,1350	5,3106	5,4658	5,6048
90	1278,393	4,9403	5,1202	5,2763	5,4142	5,5376
100	2081,920	4,9460	5,1080	5,2484	5,3724	5,4835

XXXIII. Si l'on accumuloit les mêmes rentes au 6 p. $\frac{0}{0}$, on auroit

10 ans	12,51885	−2,9031	−1,3290	+0,01507	+1,20004	+2,2719
20	33,62015	+3,5708	+4,3722	5,0714	5,692	6,25027
30	70,09126	4,9052	5,4449	5,9152	6,3319	* 6,7060
40	134,08740	5,3510	5,7577	6,1114	* 6,4243	6,7050
50	247,3767	5,5432	5,8466	* 6,1522	6,4026	6,6270
60	448,94273	5,6426	5,9143	6,1503	6,3601	6,5458
70	808,59819	5,7022	5,9352	6,13751	6,31624	6,47637
80	1451,3687	5,7424	5,9463	6,1233	6,27966	6,41979
90	2601,1548	5,7719	5,9532	6,1132	6,2494	6,3740
100	4658,9232	5,7948	5,9579	6,0996	6,2246	6,3366

Il ne ſera pas hors de propos d'examiner ici quelques

$t = 19{,}32263$ ans, & $y = \sqrt[t]{\left(\frac{at}{q}\right)} - 1 = (e)^{a:qe}\ 1 = 5{,}31155$ pour cent.

autres annuités décroissantes dont on fait usage, & qui pourroient présenter des *maxima* de profit d'intérêt.

XXXIV. Dans les annuités constantes, dont l'équation est $ck^t = \frac{a(k^t - 1)}{i}$, la suite des amortissemens annuels du capital est une progression géométrique dont l'exposant est k; & il est facile de trouver que l'amortissement de la première année est - - - $\frac{c(k-1)}{k^t-1} . k^0 = \frac{a}{k^t}$

- - - - de la seconde - - - - - - $\frac{c(k-1)}{k^t-1} . k = \frac{a}{k^{t-1}}$

- - - de la troisième - - - - - $\frac{c(k-1)}{k^t-1} . k^2 = \frac{a}{k^{t-2}}$

- - - - - de la n^{eme} - - - - - - $\frac{c(k-1)}{k^t-1} . k^{n-1} = \frac{a}{k^{t-n+1}}$

D'où l'on peut conclure qu'on auroit une suite d'annuités décroissantes, si l'on faisoit les amortissemens annuels égaux.

Emprunt remboursable par des annuités décroissantes.

XXXV. En effet, supposons, par exemple, qu'on empruntât au j pour 1 une somme de t unités; sous condition 1°. d'en payer chaque année les intérêts au r pour 1; 2°. de rembourser chaque année par la voie du sort la t^{eme} partie du capital; 3°. d'attribuer en outre, à chaque tirage annuel des remboursemens des capitaux, une somme de primes, pour être distribuée en forme de loterie aux propriétaires des actions qu'on rembourse.

Soit $1+r=h$; $1+j=k$; $1+i=q$; & $1+v=p$.

Si les primes annuelles sont constantes, on aura cette suite

$$tk^t - [h+v+(t-1)r]k^{t-1} - [h+v+(t-2)r]k^{t-2} \ldots - [h+v+(t-t)r]k^0 = 0$$

ou $tk^t = \frac{tr}{j} + \frac{k^t-1}{j}[1+v-r(\frac{k}{j}-(t+1))]$, d'où l'on tirera

$v = \frac{(j-r)[1-k^t(1-tj)]}{j(k^t-1)}$: & l'équation qui donnera le profit d'intérêt y pour 1 que feroient des Prêteurs également intéressés dans chaque tirage feroit

$$t(1+y)^t = \frac{tr}{i} + \frac{q^t-1}{i}[1+v-r(\frac{q}{i}-(t+1))].$$

Par exemple, soit $j=0{,}06$; $t=10$; $r=0{,}04$ & $i=0{,}05$ on aura $v=0{,}1195600$. L'Emprunteur paieroit donc chaque année

10,000000 d'amortissement.
400000 pour les intérêts de cette partie.
1,195600 de primes

11,595600, plus les intérêts au 4 pour 100 du capital restant ; ce qui donneroit cette suite de paiemens,

15,195600 à la fin de la 1ère an.	13,195600 à la fin de la 6me an.
14,795600. . . . . . seconde	12,795600. . . . . septième
14,395600. . . . . troisième	12,395600. . . . . huitième
13,995600. . . . . quatrième	11,995600. . . . . neuvième.
13,595600. . . . . cinquième	11,595600. . . . . dixième.

La somme annuelle des primes feroit $=11{,}95600$; l'emprunteur supporteroit le 6 pour 100, & les créanciers accumulant chaque payement au 5 pour 100, trouveroient au bout 10 ans leur argent placé ou 5,4809 pour 100.

XXXVI. Mais par une telle distribution de payemens, les capitaux remboursés aux premiers tirages feroient augmentés d'un plus grand profit que ceux qui feroient remboursés vers la fin. En effet les propriétaires des dix premiers millions auroient gagné au bout d'un an le 15,956 p.$\frac{o}{o}$; Inconvénient d'un tel emprunt.

& le $\sqrt[10]{[1,15956(1,05)^9]}-1=6,0473$ pour 100 au bout de 10 ans ; tandis que les propriétaires des dix derniers millions n'auroient que le $\sqrt[10]{[1,11956+\frac{0,04(1,05^{10}-1)}{0,05}]}-1=$ 4,95984 p. $\frac{o}{o}$ au bout de 10 ans.

Or, un emprunt qui offriroit des profits ainſi décroiſſans ſeroit de nature à baiſſer de valeur dans les dernières années de ſes rembourſemens ; & comme un Emprunteur pourroit penſer que c'eſt bien aſſez que l'emprunt le mieux combiné ſoit ſujet à baiſſer, parce qu'il peut devenir papier monnoie, & qu'il pourroit trouver à cela même un inconvénient : ſi certaines conſidérations morales qui pourroient quelquefois l'engager à diſpoſer ainſi les avantages de ſon emprunt, ne prévaloient pas ſur cet inconvénient, & qu'il voulut le diminuer ou même l'éviter ; il faudroit qu'il fît croître annuellement la ſomme des primes ; ce qu'on pourroit opérer d'une infinité de manières, & le plus ſimplement, d'une des deux ſuivantes.

Autres annuités décroiſſantes.

$$tk^t-[h+v+(t-1)r]k^{t-1}-[h+2v+(t-2)r]k^{t-2}\ldots-[h+tv+(t-t)r]=0$$

ou $tk^t-[h+(p-1)+(t-1)r]k^{t-1}-[h+(p^2-1)+(t-2)]k^{t-2}\ldots-[h+(p^t-1)+(t-t)r]=0$

XXXVII. La première équation donne

$v=\frac{(j-r)[1-k^t(1-tj)]}{k(k^t-1)-tj}=0,0238072$; enſorte que l'emprunteur payeroit

à la fin de la 1ere année	10,400000	
	238072	=14,238072
	3,600000	
de la seconde.	10,400000	
	476144	=14,076144
	3,200000	
de la troisièm.	10,400000	
	714216	=13,914316
	2,800000	
de la quatriè.	10,400000	
	952288	=13,752288
	2,400000	
de la cinquiè.	10,400000	
	1,190360	=13,590360
	2,000000	
à la fin de la sixième année	10,400000	
	1,42831	=13,428431
	1,600000	
de la septième	10,400000	
	1,666504	=13,266504
	1,200000	
de la huitièm.	10,400000	
	1,904576	=13,104576
	800000	
de la neuviè.	10,400000	
	2,142648	=12,942648
	400000	
de la dixième.	10,400000	
	2,380720	=12,780720
	000000	

La somme de toutes les primes annuelles seroit $=13,093960$; l'emprunteur supporteroit le 6 pour 100; & les créanciers pris en masse auroient au bout de dix ans, $t(1+y)^t=\frac{t}{i}(r-v)+\frac{(q^t-1)}{i}[1+(t+1)r-\frac{q}{i}(r-v)]=$ $=17,073649$: ce qui feroit le montant de leurs capitaux & des intérêts au 5,495 p. $\frac{0}{0}$. Les premiers payés gagneroient le 6,38072 pour cent au bout d'un an; ou $\sqrt[10]{(1,0638072\times 1,05^9)}-1=5,1373$ pour cent au bout de dix ans; & les derniers dix millions rapporteroient le $\sqrt[10]{(1,238072+0,5031153)}-1=5,70235$ pour cent.

XXXVIII. S'il paroissoit encore plus naturel que ceux qui sont le plus long-temps privés de leurs fonds fissent un profit d'intérêt un peu plus grand; cela pourroit s'opérer par la seconde suite. Elle donne

$$p^{t+1}-p[k^t(t+1+\frac{r}{jj}(1-tj))-\frac{r}{jj}]+k[k^t(t+\frac{r}{jj}(1-tj))-\frac{r}{jj}]=0$$

ou $p^{t+1}-Ap+B=0$; par conséquent, $x^{t+1}-Ax+B=y$. Or, si nous faisons ensorte que x soit une valeur approchée de p, ce qui n'eſt pas difficile, puiſqu'en tout état de cauſe, x eſt $>$ que $1+j-r$ & $<$ que $1+j$ nous aurons $p=x-\frac{ydx}{dy}+\frac{y^2ddx}{2dy^2}-\frac{y^3d^3x}{2,3dy^3}+$ &c. & par conſéquent, en général, $p=x+\frac{y}{A-(t+1)x^t}+\frac{t(t+1)x^{t-1}yy}{2[A-(t+1)x^t]^2}+$ &c. & ici en particulier, $p=1{,}02+0{,}002338577=1{,}022338577$.

Nous aurons donc

$$\begin{array}{ll} p^1-1=0{,}0223386 & p^6-1=0{,}1417435 \\ p^2-1=0{,}0451763 & p^7-1=0{,}1672483 \\ p^3-1=0{,}068{,}241 & p^8-1=0{,}1933232 \\ p^4-1=0{,}0923933 & p^9-1=0{,}2199800 \\ p^5-1=0{,}1167959 & p^{10}-1=0{,}2472330 \end{array}$$

Ainſi la ſomme de toutes les primes annuelles ſeroit $=13{,}247562$, & l'emprunteur payeroit

à la fin de la 1ere année.	10,400000 223386 3,600000	=14,223386	à la fin de la ſixième année	10,400000 1,417435 0,600000	=13.417435
de la deuxièm	10,400000 451763 3,200000	=14,051763	de la ſeptièm.	10,400000 1,672483 1,200000	=13,272483
de la troiſièm.	10,400000 685241 2,800000	=13,885241	de la huitièm.	10,400000 1,933232 ,800000	=13,133232
de la quatriè.	10,400000 923933 2,400000	=13,723933	de la neuvièm	10,400000 2,199800 400000	=12,999800
de la cinquiè.	10,400000 1,167959 2,000000	=13,567959	de la dixième	10,400000 2,472330 000000	=12,872330

Il ſupporteroit le 6 pour 100; & les prêteurs auroient collectivement au bout de dix ans.

$t(1+y)^t=\frac{p}{i-v}(q^t-p^t)-\frac{r}{ii}[q^t(1-ti)-1]=17{,}074655$, & leur argent placé au $y=5{,}4958$ pour 100. Les premiers dix

dix millions leur rapporteroient le 6,23385 pour 100 au bout d'un an; ce qui se réduiroit au $\sqrt[10]{(1,062338.1,05^9)}-1$ $=5,1227$ pour $\frac{0}{0}$ au bout de dix ans, s'ils ne trouvoient pas à mieux placer leur remboursement qu'au 5; & les derniers dix millions rapporteroient le . . . . . . $\sqrt[10]{(1,247233+,05031153)}-1=5,757$ pour 100.

XXXIX. Si l'on payoit, sur le même taux d'intérêt 6 pour 100, des annuités constantes; elles seroient de 13,58680 pour 100; la somme d'accumulation seroit $=17,089312$ au bout de dix ans; & le profit d'intérêt moyen $=5,50487$ pour 100: profit plus grand que ceux ci-dessus, parce que, si l'on veut ne point faire de prismes & rembourser tous les prêteurs également, une plus grande partie des capitaux fructifieroient plus long-temps au taux que l'emprunteur supporte; ou que, si l'on veut distinguer dans chaque annuité, outre un amortissement constant, des payemens d'intérêts & des primes, ces primes seroient croissantes; la n^{eme} étant en général $\frac{at-1-r(1+t-n)}{t}$. Il pourroit même arriver qu'elles fussent négatives dans les premiers payemens, car celle de la première année ne seroit $=0$ que lorsque l'on prendroit $r=\frac{at-1}{t}$; dans notre cas, par exemple, il faudroit que r fût $=0,035868$ pour que la première prime fût nulle; & l'on auroit cette suite de payemens

$$\text{à la fin de la 1ere année.}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 000000\\ 3,228120\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la feconde.}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 358680\\ 2,869440\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la troifième}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 717360\\ 2,510760\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la quatriè.}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 1,076040\\ 2,152080\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la cinquiè.}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 1,434720\\ 1,793400\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{à la fin de la fixièm. année}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 1,793400\\ 1,434720\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la feptième}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 2,152080\\ 1,076040\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la huitième}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 2,510760\\ 717360\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la neuvièm.}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 2,869440\\ 358680\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la dixième}\quad \left.\begin{array}{r}10,358680\\ 3,228120\\ 000000\end{array}\right\}=13,586800$$

La fomme des primes feroit $= 16,14060$, les premiers payés auroient au bout de dix ans, $(1,0483365)^{10}$ & les derniers, $(1,058968)^{10}$.

Mais fi l'on faifoit $r = 0,04$, l'Emprunteur auroit à payer

$$\text{à la fin de la 1ere année}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ -413200\\ 3,600000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la feconde.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ -13200\\ 3,200000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la troifièm.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ +386800\\ 2,800000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la quatriè.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 786800\\ 2,400000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la cinquiè.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 1,186800\\ 2,000000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{à la fin de la fixième année}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 1,586800\\ 1,600000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la feptième}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 1,986800\\ 1,200000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la huitièm.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 2,386800\\ 800000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la neuviè.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 2,786800\\ 400000\end{array}\right\}=13,586800$$

$$\text{de la dixième.}\quad \left.\begin{array}{r}10,400000\\ 3,186800\\ 000000\end{array}\right\}=13,586800$$

la fomme des primes feroit $= 13,868000$ les premiers payés auroient au bout de dix ans $0,9986794 \times (1,05)^{9} =$ $= (1,044751)^{10}$, & les derniers auroient $(1,061816)^{10}$.

Donc dans le cas où tous les Prêteurs ne seroient pas également intéressés à chaque paiement annuel cette forme de remboursemens auroit l'inconvénient contraire à celui que nous avons trouvé à la suite des remboursemens du N°. 35.

XL. Mais si l'on vouloit éviter ces deux inconvéniens & faire que les sorts des Prêteurs, sorts inégaux en apparence, le fussent en réalité (*hyp.*); il n'y auroit qu'à faire croître les primes de manière que dès la fin de la t^{eme} année les montans de chaque remboursement & de leurs intérêts au i pour 1, fussent égaux entr'eux, & il est aisé de voir que pour obtenir ce résultat, il faudroit que, la première prime étant v, la n^{eme} fut en général $\left(\frac{i-r}{i}+v\right)q^{n-1}-\frac{i-r}{i}$, & que $v=\frac{(j-i)\left[tk^t(j-r)-r(k^t-1)\left(\frac{j-i}{ji}\right)\right]}{j(k^t-q^t)}-\frac{(i-r)}{i}$. Faisant donc $j=0{,}06$; $i=0{,}05$; $r=0{,}04$; & $t=10$: on trouveroit $v=0{,}0600787$. De sorte que l'Emprunteur paieroit

à la fin de la 1ere année.	10,400000 600787 3,600000	=14,600787	à la fin de la sixième année	10,400000 1,319338 1,600000	=13,319338
de la deuxièm	10,400000 730827 3,200000	=14,330827	de la septièm.	10,400000 1,485304 1,200000	=13,085304
de la troisièm.	10,400000 867369 2,800000	=14,067369	de la huitièm.	10,400000 1,659570 ,800000	=12,859570
de la quatriè.	10,400000 1,010737 2,400000	=13,810737	de la neuvièm	10,400000 1,842548 400000	=12,642548
de la cinquiè.	10,400000 1,161275 2,000000	=13,561275	de la dixième	10,400000 2,034675 000000	=12,434675

Il ſupporteroit le 6 pour cent & chacun des créanciers auroit au bout de dix ans $(1+y)^t = (h+v)q^{t-1} = (1{,}0549035)^{10}$; cependant les dix premiers millions rapporteroient plus du dix pour cent au bout d'un an ; les dix ſuivans plus du 7,475, ainſi de ſuite.

XLI. Enfin, comme les Prêteurs pris en maſſe feroient le plus grand gain poſſible ſi leurs capitaux étoient tous rembourſés à la fois, avec leurs intérêts au j pour 1, à la fin de la dernière année ; plus la ſérie des amortiſſemens ſeroit divergente, plus l'on atteindroit ce but. Mais comme la loi de cette ſérie doit réſulter de l'emploi que l'emprunteur fait de l'argent & des rentrées que cet emploi lui procure à certaines époques, je me bornerai à faire encore ici deux ſuppoſitions.

La première eſt que la ſuite des amortiſſemens ſe faſſe ſelon la progreſſion arithmétique $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots t$.

La ſeconde eſt que cette ſuite ſoit en progreſſion géométrique $\div f^0, f^1, f^2, f^3, f^4 \ldots\ldots f^{t-1}$.

Faiſant toujours variables les primes annuelles & croiſſantes comme $\left(\frac{i-r}{i}+v\right)q^{n-1} - \frac{i-r}{i}$ pour égaliſer les avantages des prêteurs ; la première ſuppoſition nous donnera

$$\frac{t.\overline{t+1}}{2}\cdot k^t = \frac{t.\overline{t+1}}{2}\cdot\frac{r}{j}\cdot k^t + \frac{(k^t-1)kr(j-i)}{jjji} + \frac{i(1+v)-r}{i(j-i)}\left\{\frac{k(k^t-q^t)}{j-i} - tq^t\right\} - (j-i)\cdot\frac{rt}{jji}$$

$$\& \; v = \frac{\left\{\frac{t.\overline{t+1}}{2j}\cdot(j-r)k^t - \frac{(k^t-1)kr(j-i)}{jjji} + (j-i)\frac{rt}{jji}\right\}\cdot(j-i)}{\frac{k(k^t-q^t)}{j-i} - tq^t} - \frac{(i-r)}{i}$$

$= 0{,}073399$.

La ſeconde ſuppoſition nous donnnera

$$\frac{f^t-1}{f-1}\cdot k^t=\left(\frac{f^t-k^t}{f-k}\right)\cdot r\cdot\left(\frac{(f-1)-i}{i(f-1)}\right)+\left(\frac{f^tq^t-k^t}{fq-k}\right)\cdot\left(\frac{i-r}{i}+v\right)+\frac{rf^t}{f-1}\left(\frac{k^t-1}{j}\right)$$

$$\&\ v=\frac{\left\{\frac{f^t-1}{f-1}\cdot k^t-\left(\frac{f^t-k^t}{f-k}\right)r\left(\frac{(f-1)-i}{i(f-1)}\right)-\frac{rf^t}{f-1}\left(\frac{k^t-1}{j}\right)\right\}\cdot\overline{fq-k}}{f^tq^t-k^t}-\frac{(i-r)}{i}$$

Si l'on faisoit $f=2$, c'est-à-dire, que la suite des amortissemens fût $\div 1, 2, 4, 8, 16, 32, ---2^{t-1}$, & que l'on gardât toujours les mêmes valeurs de j, i, r & t employées dans ces derniers paragraphes, on trouveroit $v=0{,}0906668$; l'emprunt seroit composé de 1023 actions d'une valeur quelconque; l'emprunteur supporteroit le 6 pour $\frac{0}{0}$, & tous les prêteurs auroient au bout de 10 ans, $(1{,}0578006)^{10}$, pour chaque unité de capital prêté.

Quant à la première supposition, elle donneroit les payemens suivans.

à la fin de la 1ere année.	1,040000 73399 2,160000	=3,273399	à la fin de la sixième année	6,340000 893604 1,360000	=8,493604
de la deuxièm	2,080000 174138 2,080000	=4,334138	de la septièm	7,280000 1,164665 1,080000	=9,524665
de la troisièm.	3,120000 304267 1,960000	=5,384267	de la huitièm.	8,3200 00 1,477598 760000	=10,557598
de la quatriè.	4,160000 465974 1,800000	=6,425974	de la neuvièm	9,360000 1,835413 400000	=11,595413
de la cinquiè.	5,200000 661591 1,600000	=7,461591	de la dixième	10,400000 2,241315 00000	=12,641315

Si l'on cherchoit la valeur de tous ces payemens au moment où se feroit l'emprunt, en les escomptant au 6 pour 100, on la trouveroit à très-peu-près égale à la somme empruntée, laquelle est supposée ici être

$=55{,}000000$, d'où il ſuit que l'emprunteur ſupporteroit le 6 pour 100. Quant aux prêteurs ils auroient tous au bout de dix ans une ſomme d'accumulation exprimée par $(1{,}056174)^{10}$, c'eſt-à-dire, le montant de leurs capitaux & de leurs intérêts compoſés au 5,6174 p. %.

Maxima des profits faits à ces annuités.

XLII. Maintenant je dis que les quatre premières hypothèſes de rembourſement expoſés aux N^{os} 36, 37, 38 & 39 donneront toujours, lorſque $r>i$, des *maxima* de profits d'intérêt pour les prêteurs, auxquels il faudroit avoir égard; par exemple, ſi dans la troiſième hypothèſe on faiſoit $r=0{,}08$; $i=0{,}05$ & $p=1{,}025$; ſoit $q^t\left(\frac{p}{i-v}-\frac{r}{ii}(1-ti)\right)-\frac{p^{t+1}}{i-v}+\frac{r}{ii}=N$; l'équation par laquelle il faudroit déterminer le temps du *maximum* ſera
$$\frac{N}{t}\left(1+L\left(\frac{N}{t}\right)\right)-q^t\left\{\frac{r}{i}+\left(\frac{p}{i-v}-\frac{r}{ii}(1-ti)\right)Lq\right\}+\frac{p^{t+1}\,Lp}{i-v}=0$$
dans laquelle les logarithmes ſont hyperboliques, & l'on trouvera $t=38{,}77139$, ainſi des deux autres.

Mais les trois dernières hypothèſes expoſées aux N^{os} 40 & 41 n'admettent point de *maximum*, ni en général aucune de celles dans leſquelles on feroit croître les primes de manière à égaliſer les profits; parce que les équations par leſquelles il faudroit déterminer ces *maxima*, ſe réduiront toujours à $(1+y)^t=(h+v)\,q^{t-1}$, équation qui n'admet point de *maximum*.

Je paſſe ici ſur une foule d'obſervations & de calculs, afin d'en venir plus promptement aux rentes viagères qui nous importent le plus.

Rentes viagères.

Valeurs calculées par Mr. de Parcieux.

XLIII. M. de Parcieux a calculé les prix des rentes viagères ſur des têtes qui mourroient comme les rentiers des tontines qui furent créées en France en 1689 & 1696. Il a trouvé qu'une personne de 9 ans, par exemple, doit donner 16, 27 liv., pour avoir pendant toute sa vie une liv. de rente, si l'emprunteur paye l'intérêt au 5 pour 100; ce qui établit le viager à 6 liv. 3 sols pour 100 de capital.

Si l'emprunteur payoit l'intérêt au 5 $\frac{5}{9}$ pour 100, cette même personne devroit donner 15, 03 liv.; ce qui établit le viager à 6 liv. 13 sols pour 100 liv. de prêt: & si l'emprunteur paye l'intérêt au 6 $\frac{1}{4}$ pour $\frac{0}{0}$, elle devra donner 13,66 liv.; ce qui établit le viager à 7 liv. 6 f. 5 den. pour 100 liv.

XLIV. Comme les rentes viagères se payent par six mois, & d'après des intérêts beaucoup plus forts que ceux que M. de Parcieux a supposés; j'ai calculé d'après la même table de mortalité les prix de telles rentes viagères pour tous les âges; & pour ne citer que quelques exemples, j'ai trouvé que si l'emprunteur tient compte des intérêts au 2 $\frac{1}{2}$ pour $\frac{0}{0}$ par six mois, une personne de dix ans doit donner 32, 70541 liv., prix le plus fort pour avoir une livre de rente viagère par six mois; ce qui établit le viager à 3,0576 pour $\frac{0}{0}$ par six mois. — Autres calculs sur les mêmes tables.

Si l'emprunteur paye les intérêts au 3 pour $\frac{0}{0}$ par six mois, la même personne devra donner 28,38619 liv. pour la même rente; ce qui établit le viager au 3,52284 pour $\frac{0}{0}$ par six mois.

Si l'emprunteur paye les intérêts au 3 $\frac{1}{2}$ pour $\frac{0}{0}$ par six mois, elle devra donner 25,01442 : ce qui établit le viager au 3,9977 pour $\frac{0}{0}$ par six mois.

Si l'emprunteur paye l'intérêt au 4 pour $\frac{0}{0}$ par 6 mois; le prix de la même rente pour le même âge de dix ans sera 22,3233 liv. & l'intérêt viager sera au 4,47962 p. $\frac{0}{0}$ par six mois.

Si l'emprunteur paye l'intérêt au $4\frac{1}{2}$ pour $\frac{0}{0}$ par six mois, le prix le plus fort, & par conséquent le meilleur âge sera alors à onze ans. Une personne de cet âge devra donner 20,1360 liv. pour une livre de rente viagère par six mois; ce qui établit le viager au 4,96623 pour 100 par six mois.

Enfin, si l'emprunteur paye 5 pour $\frac{0}{0}$ par six mois d'intérêt; il devra 5,45504 pour $\frac{0}{0}$ de viager à une personne de onze ans; ou celle-ci devra lui donner 18,33167 liv. pour avoir toute sa vie une livre de rente à chaque six mois.

J'ai aussi calculé d'après cette table de mortalité les prix des rentes viagères sur deux, trois & plusieurs têtes, & pour quelques autres suppositions; pour les tontines, les caisses de veuves, les reversions ou survivances, les successions, &c. (17). Mais comme on pourroit

(17) On trouvera aussi dans mes élémens des tables de mortalité pour l'un & l'autre sexe séparément, tirées des régistres mortuaires de la ville de Genève, avec distinction des morts de petite vérole & de rougeole, & quelques calculs de rentes & de probabilités de vies faits d'après ces tables.

Sans entrer ici dans le détail des corrections que ces tables paroissent exiger, de même que toutes les tables mortuaires, lorsqu'on les compare avec la suite des naissances pendant plusieurs années, &c.

Fig. 6. je me bornerai à donner ici deux courbes, fig. 6, au moyen desquelles on peut se faire une idée de la mortalité de l'un & l'autre

pourroit vouloir suivre le calcul de mortalité des rentiers de Hollande & d'Angleterre, recueilli par M. de Kerseboom,

---

sexe, observée à Genève pendant les 74 premières années de ce siècle. Ces courbes font voir entr'autres, qu'abstraction faite des troupes qui ont été récemment établies dans cette ville pour la police intérieure, il y existe beaucoup plus de femmes que d'hommes; quoiqu'il naisse davantage de ceux-ci dans le rapport de 22 à 21 : d'où il suit qu'elles s'expatrient moins qu'eux. Et si l'on pouvoit tirer une conclusion immédiate de ces tables mortuaires pour la population réelle & actuelle, & pour la loi de mortalité; il en résulteroit que le sort d'un grand nombre de filles qui se marient est de se trouver un jour veuves, non-seulement parce que, selon l'ordre naturel, des hommes âgés de 25, 30, 35 ans, &c. vivent moins longtems que des femmes âgées de 20, 25, 30, &c. 5 ans plus jeunes; mais parce qu'à Genève en particulier, toutes choses d'ailleurs égales, la loi de mortalité paroît enlever plus d'hommes que de femmes.

Pour donner un exemple de tout ceci, je prendrai un des cas les plus favorables à la durée des mariages; je supposerai que les hommes ayent tous 25 ans & les femmes 20 ans, lorsqu'ils se marient. Selon la méthode ordinaire de trouver la population par les tables mortuaires, le nombre des hommes subsistans à l'âge de 25 ans, seroit dans une ville 74 fois aussi grande que Genève =10948; & le nombre des femmes de 20 ans seroit =15223. Au bout de 5 ans les hommes âgés de 30 ans seroient au nombre de 10182; & les femmes âgées de 25 ans au nombre de 14485, comme on le voit dans les deux premières colonnes de la table ci-dessous. Dans cette même ville il y auroit 580360 filles & femmes vivantes depuis l'âge de 20 ans jusqu'à celui de 105, & seulement 353914 hommes depuis l'âge de 25 ans jusqu'à 105; d'où il suit qu'il y auroit dans une ville 74 fois aussi grande que Genève 226446 filles, à compter dès l'âge de 20 ans, qui ne pourroient jamais connoître les douceurs du mariage, à moins qu'elles n'épousassent un jour des veufs, & que les veuves ne se remariassent pas. Quant à Genève, en distrayant du nombre total des je prendrai des valeurs de rentes conformes à celles que donne M. de St. Cyran, dans un ouvrage qu'il a

---

filles au-dessus de 20 ans, un nombre égal à celui des hommes célibataires, on en trouveroit encore 3060 non mariées & fixées pour toujours dans cette ville.

Unissons actuellement 100 jeunes gens de 25 ans avec 100 demoiselles de 20; & examinons ce que deviendroient ces mariages. Posant 100 au lieu de 10948 & de 15223, on trouvera, au moyen des nombres des deux premières colonnes de la table ci-après, & d'une simple règle de trois, les nombres écrits aux 4eme & 5eme colonnes. Puis désignant par la variable Y le nombre décroissant des 100 hommes qui subsisteroient aux différens âges; par y la somme de ceux qui seroient morts depuis l'âge de 25 ans; désignant, de même, par les variables Z & z les nombres des femmes corrélatifs à ceux des hommes dont nous venons de parler; mais à partir de l'âge de 20 ans: enfin, le nombre des mariages étant $M=100$, on aura

$$M = Y + y$$
$$M = Z + z$$

$$MM = YZ + yZ + Yz + yz \quad \& \quad M = \frac{YZ}{M} + \frac{yZ}{M} + \frac{Yz}{M} + \frac{yz}{M}$$

Et selon les principes les plus certains du calcul des probabilités, $\frac{YZ}{M}$ sera le nombre des mariages dans lesquels les deux conjoints seront vivans.

$\frac{yz}{M}$ ou $y\left(1-\frac{Z}{M}\right)$ ou $z\left(1-\frac{Y}{M}\right)$ celui des mariages dans lesquels les deux conjoints seront morts;

$\frac{Yz}{M}$ ou $Y\left(1-\frac{Z}{M}\right)$ le nombre des veufs existans;

& $\frac{yZ}{M}$ ou $Z\left(1-\frac{Y}{M}\right)$ celui des veuves.

Au moyen de quoi, calculant les nombres des 7, 8, 9 & 10emes colonnes, on verra entr'autres, que dans la moitié de ces mariages un seul des conjoints sera mort au bout de 23 ans, & tous deux au bout de publié sur les rentes viagères, & qui a été approuvé par l'Académie Royale des Sciences.

---

47 ans; que le nombre des veufs & des veuves augmentera jusqu'à un certain point après lequel il diminueroit; que le nombre des veufs aura atteint son *maximum* vers la 35^e année, & celui des veuves vers la 40^e; que de ces deux *maxima*, celui des veuves contiendroit presqu'une fois & trois quarts celui des veufs; qu'il y auroit encore des veuves quand tous les hommes seront morts, &c. &c.

De plus, supposons que pendant (105-20) ou 85 ans il se soit fait annuellement 100 mariages dans lesquelles la femme avoit 20 ans & l'homme 25; il seroit facile de savoir à-peu-près combien il existe constamment dans Genève de veufs & de veuves de ces mariages, tant anciens que nouveaux, en posant

1°. Pour le nombre des mariages dans lesquels le mari & la femme sont encore vivans,

$$\left\{\frac{100+0}{2}+88,496+78,14+\cdots+0,004+0\right\}\times 5+\frac{100+0}{2}=\ldots$$

$=2478,895$, soit 2479.

2°. Pour le nombre des mariages dans lesquels la femme est morte,

$$\left\{\frac{0+0}{2}+4,509=8,725+\cdots+0,064+0\right\}\times 5+\frac{0+0}{2}=\ldots\ldots$$

$=758,625$, soit 759, (c'est-à-dire, le nombre des veufs de tout âge.)

3°. Pour le nombre des mariages dans lesquels le mari est mort,

$$\left\{\frac{0+0}{2}+6,658+11,816+\cdots+0,066+0\right\}\times 5+\frac{0+0}{2}=\ldots\ldots$$

$=1336,250$, soit 1336, (c'est-à-dire le nombre des veuves de tout âge.)

4°. Pour le nombre des mariages dans lesquels les deux conjoints sont morts.

$$\left\{\frac{0+100}{2}+0,339+1,319+\cdots+99,934+100\right\}\times 5+\frac{0+100}{2}=\ldots$$

$=4026,230$, soit 4026

En tout 8600, c'est-à-dire, 85×100 + les 100 mariages qui commencent avec la première des 85 années.

Il paroîtroit par ces calculs, que la caisse d'escompte qui a été

Calculs fur les Tables de M. de Kerfeboom.

XLV. Je fuppoferai donc que le prix d'une livre de rente par année pour une perfonne âgée de 8 ans, eft

---

récemment établie dans Genève, pour la profpérité de quelques fabriques, pourroit en même temps affurer les vies des hommes en faveur de leurs femmes & de leurs filles, ou fe charger de payer à celles-ci une

---

I.		II.		III.		IV.	V.		VI.
Nombres d'hommes & de femmes vivans dans une ville 74 fois auffi grande que Genève, donnés par les tables mortuaires de la ville pendant les 74 premières années de ce fiècle.				Y		y	Z		z
				maris exiftans.		maris morts.	femmes fubfiftantes.		femmes mortes.
ans.	hommes.	ans.	femmes.		au bout de			au bout de	
25	10948	20	15223	100,000	0	0,	100,000	0	0,
30	10182	25	14485	93,003	5	6,997	95,152	5	4,848
35	9510	30	13694	86,865	10	13,135	89,956	10	10,044
40	8725	35	12873	79,695	15	20,305	84,565	15	15,435
45	7896	40	11936	72,123	20	27,877	78,407	20	21,593
50	6953	45	11085	63,509	25	36,491	72,817	25	27,183
55	6027	50	10102	55,051	30	44,949	66,360	30	33,640
60	5017	55	9022	45,826	35	54,174	59,266	35	40,734
65	3924	60	7657	35,842	40	64,158	50,299	40	49,701
70	2798	65	6124	25,557	45	74,443	40,229	45	59,771
75	1796	70	4476	16,505	50	83,495	29,403	50	70,597
80	951	75	3011	8,687	55	91,313	19,779	55	80,221
85	375	80	1618	3,425	60	96,575	10,628	60	89,372
90	117	85	650	1,069	65	98,931	4,270	65	95,730
95	31	90	220	283	70	99,717	1,445	70	98,555
100	7	95	59	064	75	99,936	0,387	75	99,613
105	0	100	10	0	80	100,000	0,066	80	99,934
		105	0		85		0,000	85	100,000
âge des hommes.		âge des femmes.			années de mariages.			années de mariages.	

=15, 77 liv. si les intérêts sont comptés au 5 pour %; ce qui établit le viager sur le pied de 6 liv. 6 sols 10 d.

---

rente pendant leur vie, après la mort du défunt, moyennant une somme comptée une fois pour toutes, ou quelques petits payemens annuels, dépendans même de la vie des personnes qui constitueroient le fonds.

VII.		VIII.		IX.		X.	
$\frac{YZ}{M}$		$\frac{Yz}{M}$		$\frac{Zy}{M}$		$\frac{yz}{M}$	
Mariages existans en entier.		veufs existans.		veuves existantes.		Mariages totalement éteints.	
au bout		ans.		ans.		au bout	
de 0	100,000		0,		0,	de 0	0,
5	88,494	30	4,509	25	6,658	5	0,339
10	78,140	35	8,725	30	11,816	10	1,319
15	67,394	40	12,301	35	17,171	15	3,134
20	56,550	45	15,573	40	21,857	20	6,020
25	46,246	50	17,263	45	26,571	25	9,920
30	36,532	55	18,519	50	29,828	30	15,121
35	27,159	60	18,667 *	55	32,107	35	22,067
40	18,028	65	17,814	60	32,271 *	40	31,887
45	10,281	70	15,276	65	29,948	45	44,495
50	4,823	75	11,682	70	24,580	50	58,915
55	1,718	80	6,969	75	18,061	55	73,252
60	0,364	85	3,061	80	10,264	60	86,311
65	0,046	90	1,023	85	4,224	65	94,707
70	0,004	95	0,279	90	1,441	70	98,276
75	0,000	100	0,064	95	0,387	75	99,549
80			0	100	0,066	80	99,934
85					0	85	100,000
années de mariages.		âge des veufs.		âge des veuves.		années de mariages.	

par chaque 100 liv.; ou que si l'emprunteur supporte le 6 pour cent d'intérêt, le prix de la même rente viagère sur la même tête est = 13,75 liv. qui revient à 7 liv. 5 s. 6 den. de viager pour 100 liv.

Je supposerai, en second lieu, que si la rente étoit payable sur la plus longue de deux vies unies, & que les personnes fussent âgées de six ans, le prix d'une livre de rente viagère par année seroit = 18,10 liv. lorsque l'emprunteur tient compte de l'intérêt au 5 p. $\frac{0}{0}$. ce qui établit le viager à 5 liv. 10 s. 6 d. pour 100 liv.; & que si l'emprunteur paye l'intérêt au 6 pour $\frac{0}{0}$, le prix de la livre de rente est = 15,54 liv. soit 100 liv. pour 6 liv. 8 sols 9 den.

Somme d'accumulation de telles rentes pour toute la vie.

XLVI. Après quoi, comme il faut trouver l'accumulation des rentes, je raisonnerai ainsi. Puisque le prix d'une rente viagère est = 15,77 liv. dès l'âge de 8 ans, lorsque les intérêts sont à 5 p. $\frac{0}{0}$; & puisqu'en général, à l'expiration d'une rente quelconque, on doit toujours avoir une somme d'accumulation égale au montant du prix de cette rente, avec les intérêts composés au taux dont l'emprunteur est convenu en faveur des prêteurs; il s'ensuit, que le montant de l'accumulation d'une livre de rente viagère depuis l'âge de 8 ans jusqu'à celui de 96 sera $= 15,77 \times (1,05)^{96-8} = 1154,755 \times 1$. Mais si, au lieu d'une livre de rente, on en recevoit dix; on auroit dix fois ce produit ou 11547,55. Et en général, au bout de 88 ans, on aura $1154,755 \times R$ pour le montant de l'accumulation au 5 pour cent de R livres de rentes viagères annuelles constituées sur des têtes de 8 ans, lorsqu'on sera intéressé sur un certain nombre de têtes à la fois. Pareillement, si les rentiers accumulent au 6 pour cent, on aura, en suivant le même raisonnement, $R \times 13{,}75 \times (1{,}06)^{96-8}$ ou $R \times 2318{,}564$, au bout de 88 ans, pour le montant de l'accumulation de R livres de rentes viagères annuelles fondées sur ces mêmes têtes de 8 ans.

On trouvera, de même, que si la rente viagère R est sur deux têtes de 6 ans, & qu'on l'accumule à 5 p. $\frac{0}{0}$; le montant de l'accumulation au bout de 90 ans de jouissance sera $R \times 18{,}10 \times (1{,}05)^{96-6} = R \times 1461{,}22$; & que si la même rente viagère sur deux têtes de ce même âge est accumulée à 6 pour cent, le montant seroit $R \times 15{,}54 \times (1{,}06)^{96-6} = R \times 2944{,}281$.

XLVII. Quant aux sommes d'accumulation d'un âge à l'autre; pour y parvenir, il faudra retrancher, du prix de la rente pendant toute la vie, le prix *actuel* de la même rente viagère qui commenceroit seulement à être payée au bout du temps pendant lequel on veut accumuler; avec cette attention, que comme les prix dans les tables sont pour un même nombre indéterminé de personnes (en supposant que les tables mortuaires représentent la vraie loi de mortalité) & qu'il s'agit ici de l'accumulation des rentes viagères sur un certain nombre de têtes fixé lors de la création de la rente, il faudra encore diminuer le second prix dans la proportion du nombre des rentiers vivans, lors de la création de la rente, au nombre de ceux qui subsisteront à ce second âge.

D'un âge à l'autre.

Si donc l'on vouloit avoir le montant M de l'accumulation de la rente R sur une tête depuis 8 ans à

39 ans on feroit

$$M=R\left\{15{,}77-\frac{13{,}00}{(1{,}05)^{31}}\cdot\frac{615}{913}\right\}\cdot(1{,}05)^{31}\text{ ſi l'on accum. à 5 p. }\%.$$

$$M=R\left\{13{,}75-\frac{11{,}68}{(1{,}06)^{31}}\cdot\frac{615}{913}\right\}\cdot(1{,}06)^{31}\text{ ſi l'on accum. à 6 p. }\%.$$

Et ſi la rente étoit ſur deux têtes on auroit de 6 à 37 ans

$$M=R\left\{18{,}10-\frac{15{,}81}{(1{,}95)^{31}}\times\frac{(947)^2-(947-635)^2}{(947)^2}\right\}\times(1{,}05)^{31}$$

$$M=R\left\{15{,}54-\frac{13{,}98}{(1{,}06)^{31}}\times\frac{(947)^2-(947-635)^2}{(947)^2}\right\}\times(1{,}06)^{31}$$

Temps des *maxima* d'intérêts pour ces rentes.

XLVIII. J'ai trouvé que les accumulations à 5 pour % de ces ſortes d'annuités décroiſſantes donnoient en général le *maximum* d'intérêt vers la 31^eme^ année de jouiſſance, ſi la rente eſt de dix pour cent; vers la 36^eme^, ſi la rente eſt de 9 pour cent; & vers la 42^eme^, ſi la rente eſt de 8 pour cent. Et qu'en accumulant au 6 pour cent, ces mêmes rentes, il faudroit environ 33 ans de jouiſſance pour la rente de dix pour cent, 39 ans ſi la rente eſt 9 pour cent, & 49 ans ſi la rente eſt 8 pour cent: bien entendu que le plus grand des *maxima* aura lieu lorſqu'on commencera l'accumulation dès l'âge où le prix de la rente eſt le plus fort; c'eſt pourquoi je n'ai extrait des différentes tables que les nombres rélatifs à ces époques. Un plus grand détail & une plus grande exactitude ſeroient ici de peu d'utilité.

Prix

XLIX.		*Prix* d'une liv. de rente viagère *par semestre*, calculé suivant l'ordre de mortalité de M. de Parcieux.	Viager pour 100		*Intérêt* fructifiant *par 6 mois*, auquel il auroit fallu avoir placé le capital pour que son montant eût été égal à l'accumulation des rentes viagères de			*Temps* corrélatif d'annuités pour les Prêteurs.		
		L'intérêt à 2 & demi pr. 100 par 6 m.								
Sur une tête.	âgée de			*ans.*	5 pour 100 par 6 m.	4 & dem p. 100 p 6 m.	4 pour 100 par 6 mois.	*ans.*	*m.*	*j.*
	10 *ans.*	32,7054	3,0576	de 10 à 96	2,7935	2,73055	2,66023	34	5	15
	41	26,9987	3,70388	de 10 à 41	3,08083	. . .	. . .			
	46	25,0243	3,99605	de 10 à 46	. . .	2,9083	. . .			
	52	22,4050	4,0975	de 10 à 52	. . .	. . .	2,7594			
		L'intérêt à 3 pr. 100 par 6 mois.								
	10 *ans.*	28,3862	3,5228	de 10 à 96	3,2099	3,14674	3,07607	32	3	7.
	43	23,6200	4,2337	de 10 à 43	3,4075	. . .	. . .			
	49	21,6200	4,6253	de 10 à 49	. . .	3,25618	. . .			
	59	17,7800	4,6243	6e 10 à 59	. . .	. . .	3,11374			

L.		*Prix* d'une livre de rente viagère *par année*, calculé suivant l'ordre de mortalité de M. de Kerseboom.	*Viager.*		*Intérêt* fructifiant *par année*, auquel il auroit fallu avoir placé son capital, pour que son montant eût été égal à l'accumulation des rentes viagères de			*Temps* corrélatif d'annuités pour les Prêteurs.		
		L'intérêt au 5 pour 100.								
Sur une tête.	âgée de			*ans.*	10 p. 100. par année.	9 p. 100. par année.	8 p. 100. par année.	*ans.*	*m.*	*j.*
	8 *ans.*	15,77	6,2416	de 8 à 96	5,545	5,4186	5,2776	31	10	3
	39	13,00	7,6875	de 8 à 39	6,10676	. . .	. . .			
	44	12,19	8,2083	de 8 à 44	. . .	5,771	. . .			
	50	11,07	9,0333	de 8 à 50	. . .	. . .	5,4651			
		L'intérêt au 6 pour 100.								
	8 *ans.*	13,75	7,275	de 8 à 96	6,3843	6,257	6,115	29	10	29
	41	11,45	8,7333	de 8 à 41	6,76032	. . .	. . .			
	47	10,57	9,4666	de 8 à 47	. . .	6,4498	. . .			
	57	9,00	11,1125	de 8 à 57	. . .	. . .	6,1684			
		L'intérêt à 5 pour 100.								
Sur deux têtes.	âgées de									
	6 *ans*	18,10	5,525	de 6 à 96	5,9963	5,5708	5,4328	48	2	28
	37	15,81	6,325	de 6 à 37	6,38105	. . .	. . .			
	42	15,10	6,6208	de 6 à 42	. . .	6,045	. . .			
	48	14,05	7,1166	de 6 à 48	. . .	. . .	5,71775			
		L'intérêt à 6 pour 100.								
	6 *ans.*	15,54	6,4375	de 6 à 96	6,5205	6,3958	6,2567	46	2	25
	39	13,78	7,2541	de 6 à 39	7,0333	. . .	. . .			
	45	13,06	7,6541	de 6 à 45	. . .	6,7109	. . .			
	55	11,56	8,65	de 6 à 55	. . .	. . .	6,404			

Remarques sur la table précédente.

LI. Cette table présente les plus grands profits d'intérêts qu'on puisse faire, en plaçant en rentes viagères de 8, 9 & 10 p. % l'an, & de 5, $4\frac{1}{2}$ & 4 p. % par semestre. On voit, par exemple, que si la rente viagère est annuellement de 10 p, % sur une tête, que si on ne l'accumule qu'à 5 p. %, & que toutes les têtes, sur chacune desquelles elle aura été constituée, meurent comme les rentiers d'Hollande & d'Angleterre, le plus grand profit d'intérêt qu'on pourra faire, sera au bout de 31 ans de jouissance, temps compris de 8 à 39 ans; & que cet intérêt est égal à 6,10676 p. %, soit $6\frac{8}{75}$ p. %: on voit qu'au bout de 88 ans, c'est-à-dire, après la mort de la dernière tête, ce profit d'intérêt seroit seulement de 5,545 p. %, soit $5\frac{6}{11}$ p. %. On voit de même, que si au lieu de 10 p. %, la rente n'étoit que de 9 p. %, le plus grand profit d'intérêt qu'on pourroit faire en accumulant cette rente au 5 p. %, seroit au bout de 36 ans de jouissance; que cet intérêt est égal à 5,771, soit à $5\frac{64}{83}$ p. %; & qu'on n'auroit au bout de 88 ans de jouissance, que le 5,4186 p. %, soit le $5\frac{18}{25}$ p. % de son argent (18).

---

(18) Je suppose ici que les rentes sont nettes de tous fraix & exemptes de retenues; qu'il n'y a point d'arriéré; qu'elles sont constituées sur des têtes bien choisies; que l'augmentation annuelle du numéraire n'affoiblira point sensiblement la valeur des rentes dans les temps à venir; & que les banquiers les ont cédées au prix d'achat. Cependant il est à remarquer que quand un banquier gagne

0 p. %; ou 1,91344 p%; ou 7,5753 p. %; ou 13,9033 p. %; ou 21,0222 p. %
soit 0 p. %; $1\frac{74}{81}$; $7\frac{42}{73}$; $13\frac{28}{31}$; $21\frac{1}{45}$ p. %

LII. Ainſi un capitaliſte, qui ne pourroit accumuler qu'au 5 p. $\frac{0}{0}$ ſes rentes chez un banquier, gagneroit en cédant au banquier toutes ſes rentes de 8, 9 & 10 p. $\frac{0}{0}$, pourvu que celui-ci s'engageât de lui payer, pendant un certain temps, au lieu du 5 p. $\frac{0}{0}$, le 5 $\frac{1}{2}$, le 5 $\frac{3}{4}$ & le 6 de ſes capitaux. D'un autre côté le banquier, dût-il

---

ſur le capital qu'il avance, ou ſur le prix des contrats qui ſont ſes marchandiſes, la rente 10 pour 100 eſt réduite

à 9 $\frac{15}{32}$ p. $\frac{0}{0}$; 9 $\frac{1}{2}$; 9; 8 $\frac{1}{2}$; & 8 p. $\frac{0}{0}$.

Parce que, outre le gain ſur la ceſſion des rentes, & indépendamment du bénéfice qu'il peut faire en ne les payant pas à meſure qu'il les reçoit, le banquier ſe réſerve ordinairement, 1°. le 2 pour cent de proviſion ſur chaque paiement; & que, 2°. quand enſuite il vient à payer ces rentes, il fait (à Genève) un change par lequel il fait encore perdre plus de un pour cent ſur le reſtant de la rente. Car il ſuppoſe qu'il va vous payer en argent courant de Genève; & que, vû ſa rareté, 100 liv. courantes équivalent, par exemple, à 167 $\frac{1}{4}$ de France. Après cela, comme il exiſte très-peu d'argent courant en comparaiſon de ce qu'il en faudroit pour faire ſes paiemens, il vous paie en argent de France, mais ſeulement à raiſon de 165 $\frac{135}{581}$ de France pour 100 liv. de Genève, ou de 14 liv. 10 ſ. 6 d. cour. pour 24 liv. de France. Ainſi, après avoir réduit, par ſa proviſion, 100 liv. de rentes à 98 liv.; il réduit, par le change, ces 98 liv. de France à 58 liv. 11 ſ. 11 d. de Genève; & ces 58 liv. 11 ſ. 11 d. de Genève à 96 liv. 16 ſ. 4 d. de France: au moyen de quoi, il y a 3 liv. 3 ſ. 8 d. de perte par chaque 100 liv. de rentes. Les rentes ſont donc réduites comme ci-deſſus, & les profits d'intérêts en conſéquence.

En général, ſoit a pour 1 la rente que l'emprunteur paie; — i la perte ſur une livre de rente provenant de la proviſion & du change; j le profit qu'a fait le banquier ſur chaque livre du prix de la rente; r pour 1 la rente réduite par toutes ces cauſes; on aura $r = \frac{a(1-i)}{1+j}$, &c.

ne faire valoir qu'au 6 p. % ces rentes, pourroit aussi gagner considérablement à ce marché, comme on peut le voir par la table précédente. Mais si le banquier, au lieu d'accumuler les rentes au 6 p. %, ne les accumuloit qu'au 5 p. %, & qu'il s'engageât néanmoins de payer le 6 p. % des capitaux, intérêts composés, il perdroit certainement à ce marché; 1°. si les rentes n'étoient pas de 10 p. %; 2°. si, dans ce cas, il ne remboursoit pas les capitalistes vers le temps où le *maximum* de profit d'intérêt a lieu.

LIII. Si au lieu de 10 p. % par an, on recevoit 5 p. % par semestre qu'on accumulât à 2 $\frac{1}{2}$ p. % par semestre; & que les têtes fussent choisies comme les intéressés aux tontines créées en France en 1689 & 1696; le plus grand profit d'intérêt qu'on pourroit faire avec la rente 5 p. %, seroit le 3,08083 p. %, soit le 3 $\frac{8}{99}$ p. % par 6 mois : on n'auroit à la mort de toutes les têtes que le 2,7935, soit le 2 $\frac{73}{92}$ p. % par semestre. On voit, de même, que si la rente étoit de 4 $\frac{1}{2}$ p. % par 6 mois, le plus grand profit d'intérêt par 6 mois seroit le 2,9083, soit le 2 $\frac{89}{98}$ p. %; & qu'on n'auroit, au bout de 86 ans de jouissance, que le 2,73055 soit le 2 $\frac{19}{26}$ p. % d'intérêt par semestre.

LIV. Chacun peut aisément vérifier ces calculs. Si on les trouve justes, on en conclura, que si plusieurs personnes ont fait une grande fortune, en s'intéressant dans les rentes *de la forme usitée*; c'est parce qu'elles les ont achetées à un prix fort au-dessous de leur valeur réelle, ou qu'elles ont négocié sur ces effets. Mais les vrais prêteurs sont ceux qui gardent toujours la rente, & c'eſt leur bénéfice dont il s'agit ici ; or ce bénéfice eſt fort petit en comparaiſon de celui qu'on imagineroit d'abord.

Inégalité entre le taux d'intérêt ſupporté par l'emprunteur & le profit des prêteurs.

LV. De plus, je dis qu'il y a une grande diſproportion entre ces profits d'intérêts & le taux d'intérêts que l'emprunteur ſupporte pour chaque réſidu annuel de l'emprunt. Car il eſt aiſé de trouver, au moyen des calculs que j'ai donné au N°. (44) qu'indépendamment de l'embarras & des fraix qu'entraînent ces ſortes d'établiſſemens, lorſqu'un emprunteur veut rembourſer, ſans gain ni perte, un capital par des rentes viagères ſur pluſieurs têtes ſéparées de l'âge de 10 ans ; il faut qu'il faſſe valoir chaque réſidu annuel de l'emprunt au 4,5306, ſoit au $4 \frac{26}{49}$ p. % par 6 mois, ſi la rente viagère eſt de 5 p. % par ſemeſtre ; ou au 4,0182, ſoit au $4 \frac{1}{55}$ p. % par 6 mois, ſi la rente viagère eſt de $4 \frac{1}{2}$ p. % par ſemeſtre ; & au $3 \frac{1}{2}$ p. % par 6 mois, ſi la rente eſt de 4 p. % par ſemeſtre.

Ces diſparités ſont bien plus grandes ſi les *mêmes* rentes viagères ſont payables pendant la plus longue de 2, 3, ou pluſieurs vies unies ; parce qu'elles reſſemblent d'autant mieux alors à des annuités conſtantes, égales aux rentes, & payables pendant le temps de la plus grande durée de la vie humaine, qui, en n'admettant pas d'autres tables de mortalité que celles dont je viens de parler, ni plus qu'environ 1400 rentiers, ſeroit de 96 ans.

Or, 1°. j'ai déjà fait voir que, même dans le cas des annuités conſtantes, bien loin que les profits d'intérêts des prêteurs augmentent en proportion du taux que l'emprunteur ſupporte, lorſque les annuités ſont fortes & de longue durée ; ces profits d'intérêts décroiſſent après un certain temps. Mais 2°. cette diſproportion entre le denier de l'emprunt, & le denier de profit des prêteurs, diminueroit à meſure qu'ils pourroient accumuler à un plus haut intérêt, & s'évanouiroit tout-à-fait s'ils pouvoient accumuler au denier de l'emprunt. Donc il eſt généralement démontré par là, que dans les rentes viagères à gros denier & de longue durée, l'emprunteur ſupporte à pure perte une charge d'intérêt dont perſonne ne profite ; que, par conſéquent, cette forme de rembourſement eſt alors très-défectueuſe & qu'il ſeroit à ſouhaiter, pour l'intérêt de tous, qu'on la modifiât de manière qu'elle n'eût point le double inconvénient dont je viens de parler.

Annuités équivalentes à la rente pour l'emprunteur.

LVI. Avant que de paſſer à cette recherche, comparons encore les rentes viagères à des annuités conſtantes ; ou cherchons le temps pendant lequel il ſeroit égal à l'emprunteur & aux rentiers que les rentes fuſſent payées chaque année, comme s'il ne fût point mort de têtes, & ceſſaſſent enſuite totalement au lieu de diminuer chaque année par la mort des têtes.

1°. On trouvera par la formule des annuités $t=\frac{La-L(a-ci)}{L(1+i)}$, que ſi l'emprunteur fait réellement valoir au 4,5306 pour 100 par ſemeſtre, ni plus ni moins, il lui ſeroit égal, toute autre conſidération à part, de rembourſer un capital par des rentes viagères de 5 pour $\frac{0}{0}$ par 6 mois ſur l'âge de 10 ans, ou par des paiemens conſtans de 5 pour % par ſemeſtre, qui dureroient pendant 26 ans 8 mois 10 $\frac{11}{27}$ jours.

2°. Que s'il fait valoir au 4,0182 pour % par 6 mois, il lui ſeroit égal de payer 4 $\frac{1}{2}$ pour % de rentes viagères par ſemeſtre ſur le même âge, ou 4 $\frac{1}{2}$ pour % de rentes conſtantes par ſemeſtres pendant 28 ans 4 m. 8 $\frac{16}{27}$ jours.

3°. Que s'il fait valoir au 3 $\frac{1}{2}$ pour % par ſix mois, il lui ſeroit égal de payer 4 pour % de rentes viagères par ſemeſtre ſur le même âge; ou 4 pour % de rentes conſtantes, auſſi par ſemeſtre, pendant 30 ans 2 m. 20 $\frac{12}{27}$ j.

Mais ſi la rente viagère eſt ſur deux têtes; le temps eſt plus long, comme on le voit dans la table: il iroit même fort au-delà, ſi les rentiers étoient choiſis comme les tontiniers.

LVII. Or, les égalités que nous venons d'établir auroient-elles lieu auſſi pour les prêteurs? On va voir que non; car prenons ſeulement pour exemple le cas où la rente de 5 pour % par 6 mois ſera payée pendant 26 ans 8 mois 10 jours.

Si les prêteurs pouvoient accumuler la rente à 4,5306 p. % par ſemeſtre, ils auroient au bout de 26 ans 8 mois 10 jours un montant =1065,187 liv. pour 100 l. de prêt; & la préſente valeur de cette annuité, auſſi bien que de la rente viagère ſeroit pour les uns & pour les autres =100 liv.

Mais ſi les prêteurs ne pouvoient accumuler les 5 l. de rentes qu'au 2 $\frac{1}{2}$ pour % par 6 mois, ils auroient au bout de 26 ans 8 m. 10 j. un montant $\frac{a(q^t-1)}{i}$=547,456 liv. pour 100 liv. de prêt; ce qui feroit ſeulement le Pour les prêteurs.

montant du capital & des intérêts au 3,2355 pour $\frac{0}{0}$ par six mois. Or, quoique ce profit d'intérêt fût plus grand qu'aucun de ceux qu'ils feroient par la rente viagère, celle-ci cependant leur donneroit enfin un profit plus grand que ne feroit l'annuité constante. Une preuve de cela, c'est que ces 547,456 liv. vaudroient actuellement $\frac{547,456}{(1,025)^{53,3908}}=146,4852$ liv. au lieu que la rente viagère, leur donnant au bout de 86 ans un montant $= 5\times 32,70541\times(1,025)^{172}=11431,29$ l.; la valeur actuelle en est $\frac{11431,29\text{ l.}}{(1,025)^{172}}= 5\times 32,70541=163,527$ liv.

Deux espèces de valeurs des rentes viagères.

LVIII. Par cette opération, l'on voit que de telles rentes viagères ont, *au moins*, deux espèces de valeurs; l'une est le prix que l'emprunteur demande aux prêteurs pour un intérêt viager; prix que je fais = 100 liv. L'autre, est la valeur d'un de ces contrats lorsqu'il est en la possession des prêteurs; valeur qui est d'autant plus grande que les prêteurs pouvoient moins bien placer leur argent avant un tel emprunt, & qui est dans ce cas = 163,527 liv., ou en général, égale au prix d'une livre de rente, en supposant ce bas intérêt, multiplié par le nombre d'unités contenues dans cette rente (19). Non-seulement cette

(19) Dans ce cas, on trouvera, en se servant des tables de M. de Kerseboom, que le prix seroit le même, & =157,7 liv. pour une rente viagère de 10 liv. sur une tête de 8 ans, ou de 8,7127 liv. sur 2 têtes de 6 ans, ou de 8,3838 liv. sur 3 têtes de 5 ans, ou de 7,97913 liv. sur toutes les têtes de 5 ans, ou de 7, 885 liv. à perpétuité, l'intérêt étant compté à 5 pour cent: mais les prêteurs auroient des *maxima* de profits d'intérêt fort inégaux, De plus, on peut voir sans calcul que les

seconde

ſeconde valeur eſt celle du rembourſement que l'emprunteur auroit à faire aux prêteurs, s'il vouloit annuller les

Charge de l'emprunteur.

---

taux d'intérêt auxquels l'emprunteur devroit faire valoir chaque réſidu annuel du prix ci-deſſus, pour n'avoir ni gain ni perte en payant chacune de ces diverſes rentes, ſeroient très-différens.

Je me ſuis borné dans ce mémoire à examiner les principales conſéquences que doit avoir, dans les emprunts les plus uſités, une différence entre le denier auquel ſe font ces emprunts, & le denier ordinaire auquel on accumule. Les *aſſurances ſur les vies*, qui ſont un des moyens encore peu uſités par leſquels on peut emprunter même avec gain, me paroiſſent offrir un exemple trop frappant des effets de cette différence d'intérêts, pour que je ne leur donne pas place ici.

Suppoſons, pour ſimplifier les calculs, que de N perſonnes d'un certain âge, il en meure conſtamment pendant un certain temps t, un nombre m par année, & qu'une de ces perſonnes veuille faire payer la ſomme $ſ$ ſi elle vient à mourir dans l'eſpace de temps t. Il eſt aiſé de voir que ſi l'aſſureur, faiſant valoir à l'intérêt $j=k-1$, veut tenir compte à cette perſonne d'un petit intérêt $j-u=v=r-1$, cette perſonne aura à payer tout de ſuite en un ſeul paiement

$$A=\frac{mſ}{N}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\text{-------------------}+\frac{1}{r^t}\right\}=$$

$=\frac{mſ}{N}\cdot\frac{(r^t-1)}{vr^t}=\frac{mſ}{N}\cdot\frac{[(k-u)^t-1]}{(j-u).(k-u)^t}$; valeur actuelle de l'héritage de la ſomme $ſ$ pendant le temps t.

Mais ſi cette perſonne vouloit acquitter cette aſſurance par autant de paiemens annuels a qu'elle vivra d'années pendant le temps t, ce ſeroit l'aſſureur qui ſeroit cenſé placer en rentes viagères, pendant le temps t, la ſomme A ſur la vie de cette perſonne. Or, ſi nous ſuppoſons que l'aſſureur doive faire un gain dans cette aſſurance, il pourra paroître naturel qu'il demande que la rente ſoit établie ſur un denier j ou $k-1$ plus grand de la quantité u que celui v ſur lequel avoit été évaluée la ſomme A. Dans ce cas, ſi les paiemens annuels a doivent ſe faire au contrats, mais elle exprime auſſi la charge qu'il ſupporte pour chaque 100 liv. qu'il a reçues, ſi au lieu de les

---

commencement de chaque année, l'on aura cette équation

$$a = \frac{\frac{mſ}{N}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots\cdots \frac{1}{r^t}\right\}}{\frac{1}{N}\left\{n + \frac{n-m}{k} + \frac{n-2m}{k^2} + \frac{n-3m}{k^3} \cdots + \frac{n-(t-1)m}{k^{t-1}}\right\}} =$$

$$= \frac{\frac{mſ}{N}\left(\frac{r^t-1}{vr^t}\right)}{\frac{1}{Njjk^{t-1}}\left\{(k^t-1)(nj-m)+tmj\right\}},$$ formule qui ſe réduit à

$$a = ſ\left(\frac{r^t-1}{vr^t}\right) \cdot \frac{j}{k\left(t - \frac{k^t-1}{jk^t}\right)},$$ ou à $$a = ſ\left\{\frac{(k-u)^t-1}{(j-u)(k-u)^t}\right\} \cdot \frac{j}{k\left(t - \frac{k^t-1}{jk^t}\right)}$$

lorſque $N = n = t$, & que $m = 1$.

Or u peut avoir toutes ſortes de valeurs depuis o juſqu'à $k-1$.

1°. Lorſque $u = 0$, ou que $v = j$; $a = \frac{ſ(k^t-1)}{k^{t+1}\left(t - \frac{k^t-1}{jk^t}\right)}$. Alors ſi $v = j = 0$, $a\left(= \frac{ſt}{N} \cdot \frac{2N}{2tn - t(t-1)m}\right) = \frac{2ſ}{t+1}$; & ſi $v = j = \infty$, $a = \frac{ſ}{t}$; ainſi les limites des valeurs de a, ſeront compriſes entre $\frac{2ſ}{t+1}$ & $\frac{ſ}{t}$.

2°. Lorſque $u = k-1$, ou que $v = 0$; A eſt $= ſ$, ce qui eſt la plus grande valeur admiſſible de A, vu qu'il n'eſt pas naturel qu'on doive donner plus de $ſ$ liv. pour aſſurer $ſ$ liv. à ſa mort. Dans ce cas $a = \frac{ſtj}{k\left(t - \frac{k^t-1}{jk^t}\right)}$, & quoique ſuſceptible de toutes les valeurs compriſes entre ∞ & $\frac{ſ}{t}$, ſa plus grande valeur admiſſible ſera $a < ſ$.

Maintenant je dis qu'on peut avoir une infinité de valeurs de a égales entr'elles & cela, 1°. par une infinité de différentes valeurs de $j-u$; 2°. par une infinité de différentes valeurs de u. D'où il ſuit, qu'indépendamment de la différence qu'apporte, dans les ſommes d'accumulation, faire valoir à l'intérêt requis pour qu'il ne perde rien, il ne peut les faire valoir qu'au même intérêt auquel

---

la substitution d'un denier à un autre, telle table de prix des assurances sur les vies, dont la différence connue u des intérêts mentionnés ci-dessus, paroîtroit donner un gain légitime à l'assureur, pourroit au contraire, selon le taux d'intérêt auquel il fait valoir, lui donner un profit ou trop grand, ou trop petit, ou même une perte.

En effet, soit $t=56=(86-30)$; c'est-à-dire, soit proposé de trouver la prime annuelle a que doit donner une personne âgée de 30 ans, pour qu'on paye $f=100$ liv. à ses héritiers, au moment de son décès.

soit $u=0$ pour 100.

$v=0$ & $j=0$ p. 100,	on aura	$a=3,50877$
$v=1$ & $j=1$		$a=3,1850$
$v=2$ & $j=2$		$a=2,9204$
$v=3$ & $j=3$		$a=2,70506$
$v=4$ & $j=4$		$a=2,5299$
$v=5$ & $j=5$		$a=2,38705$
$v=6$ & $j=6$		$a=2,2698$
$v=7$ & $j=7$		$a=2,1729$
$v=8$ & $j=8$		$a=2,0919$
$v=9$ & $j=9$		$a=2,0234$
$v=10$ & $j=10$		$a=1,9650$
$v=\infty$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

soit $u=1$ p. 100.

$v=0$ & $j=1$	on aura	$a=4,17511$
$v=1$ & $j=2$		$a=3,7205$
$v=2$ & $j=3$		$a=3,36105$
$v=3$ & $j=4$		$a=3,07023$
$v=4$ & $j=5$		$a=2,83658$
$v=5$ & $j=6$		$a=2,64793$
$v=\infty-1$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

soit $u=2$ pour 100.

$v=0$ & $j=2$ p. 100,	on aura	$a=4,88119$
$v=1$ & $j=3$		$a=4,28547$
$v=2$ & $j=4$		$a=3,81478$
$v=3$ & $j=5$		$a=3,44241$
$v=4$ & $j=6$		$a=3,14658$
$v=\infty-2$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

soit $u=3$ pour 100.

$v=0$ & $j=3$	on aura	$a=5,61767$
$v=1$ & $j=4$		$a=4,8640$
$v=2$ & $j=5$		$a=4,27721$
$v=3$ & $j=6$		$a=3,81861$
$v=\infty-3$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

soit $u=4$ pour 100.

$v=0$ & $j=4$	on aura	$a=6,37606$
$v=1$ & $j=5$		$a=5,45364$
$v=2$ & $j=6$		$a=4,74464$
$v=\infty-4$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

soit $u=5$ pour 100.

$v=0$ & $j=5$	on aura	$a=7,14896$
$v=1$ & $j=6$		$a=6,06944$
$v=\infty-5$ & $j=\infty$		$a=1,78571$

Ces calculs sont plus que suffisans pour faire voir que les valeurs des primes annuelles a peuvent rentrer les unes dans les autres, quoique les intérêts sur lesquels on les calcule, soient très-différens; que les prêteurs accumulent. Sa perte seroit dans ce cas ci-dessus $63\frac{30}{72}$ pour 100 sur la vente des contrats. Il

---

a, par exemple, peut être $=3{,}50877$, soit que v & $j=0$ (ou $u=j$); soit que $v=0{,}0143145$ & $j=0{,}0243145$, (ou $u=0{,}01$) soit que $v=0{,}028105$ & $j=0{,}048105$, (ou $u=0{,}02$); soit que $v=0{,}038211$ & $j=0{,}068211$, (ou $u=0{,}03$) &c. &c. On trouveroit encore la même valeur de a en faisant $v=0{,}01$ & $j=0{,}016069$; $v=0{,}02$ & $j=0{,}033264$; $v=0{,}03$ & $j=0{,}051765$; $v=0{,}04$ & $j=0{,}0716325$; $v=0{,}05$ & $j=0{,}092942$; ainsi de suite à l'infini.

Or, dans tous ces cas, le profit ou la perte se feroient sur le prix A qui ne paroît point, & qui est variable au gré de $j-u$. Mais ne seroit-il pas bien plus naturel que le profit fût établi sur la somme $\int$ qu'on assure, laquelle peut rester constante, quoique v & j soient variables? C'est même le seul moyen que je voie d'éviter ces apparentes absurdités, ou même de grandes erreurs où pourroient conduire l'ignorance de l'observation que je fais ici. Pour cet effet, on n'auroit qu'à multiplier par $1+$ le denier de profit la valeur de a, lorsqu'elle ne donneroit ni gain ni perte, & que nous avons trouvée ci-dessus en faisant $u=0$.

En effet, qu'on suppose a connu, & qu'on cherche quel denier de profit y pour 1 l'assureur aura fait chaque année sur les sommes $\int$ qu'il paye, en supposant qu'il ait reçu au commencement de chaque année les payemens a, compétens aux susdites sommes $\int$, & qu'il ait toujours fait valoir au denier i les excédens de sa recette sur sa dépense? on aura cette équation

$$atq^t-\int q^{t-1}+a(t-1)q^{t-1}-\int q^{t-2}+a(t-2)q^{t-2}-\int q^{t-3}+\text{-----}+aq-\int=\frac{\int y(q^t-1)}{i}$$

$$\text{ou}\quad \frac{atq^{t+1}}{i}-\left(\int+\frac{aq}{i}\right)\cdot\left(\frac{q^t-1}{i}\right)=\frac{\int y(q^t-1)}{i}$$

$$\text{d'où}\quad a=\frac{\int(q^t-1)}{q^{t+1}\left(t-\frac{q^t-1}{iq^t}\right)}\times(1+y).$$

L'intérêt i, auquel on accumule étant connu, il sera donc aisé par ce moyen d'établir un gain fixe pour l'assureur, aussi bien que de conpourroit donc rembourſer ces 163 $\frac{39}{74}$ liv. ou tout de ſuite; ou par une rente perpétuelle de 4 liv. 1 ſ. 9 $\frac{1}{6}$ d. par

---

noître le denier de profit que fait telle compagnie d'aſſurance ſur les vies. Par exemple, LA SOCIE'TE' AMICALE de Londres demande

une prime annuelle a de	3 liv.	pour payer 100 liv. à la mort d'une perſonne âgée de. . .	20 ans.
	3 13 ſ. 6 d.		30
	6 5		50

Or, en ſuivant cette hypothèſe de mortalité, on trouveroit en faiſant $y=0$, qu'un aſſureur qui feroit valoir au 5 pour 100 n'auroit ni gain ni perte en demandant

une prime annuelle $\frac{s(q^t-1)}{q^{t+1}\left(t-\frac{q^t-1}{iq^t}\right)}$ de	1 l. 19 ſ. 1 d.	pour payer 100 liv. à la mort d'une perſonne âgée de	20 ans.
	2 7 9		30
	4 1		50

D'où il ſuit que ſi cet aſſureur demandoit les mêmes primes que LA SOCIE'TE' AMICALE, il gagneroit, pour 100, $y=\frac{3}{1,95375}-1=53,55$; $y=\frac{3,625}{2,387047}-1=53,955$; $y=\frac{6,25}{4,05049}-1=54,3$; c'eſt-à-dire, en général & à fort peu près, 54 liv. ſur chaque 100 liv. aſſurées.

Comme ces 54 liv. feroient le montant du profit de l'aſſureur au décès des perſonnes âgées de 20, 30 & 50 ans; les valeurs p de ce profit au moment où ſe feroit l'aſſurance, feroient très-différentes dans ces trois cas; car elles ſe réduiroient à 15,71 liv. pour le premier cas; à 18,03 liv. pour le ſecond, & à 24,82 liv. pour le troiſième; & pour éviter ces différences, il faudroit prendre $y=\frac{ptiq^t}{q^t-1}$. Mais les valeurs des 100 l. à ce même moment étant proportionnelles à ces réductions de profit, cela n'eſt point néceſſaire.

Par cette méthode, & en ſuivant certaines loix de mortalité, on pourra dreſſer des tables qui montrent avec préciſion ce que doivent donner au commencement de chaque année des perſonnes qui veulent s'aſſurer ou aſſurer à d'autres, ſelon différentes conditions, une ſomme payable en cas de vie, ou de mort; ou ſe faire eſcompter la valeur d'une ſurvivance, &c. Il y a ſi peu de perſonnes qui ne ſoient dans un de ces cas, que je ne doute pas qu'une compagnie d'aſſurance ſur les vies, comme celle de Londres, ne fût fort utile, & ne fît fort bien dans tout pays.

femestre, puisque c'est le $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ de 163 liv. 10 f. $6\frac{1}{2}$ d.; ou comme il fait, par la rente viagère 5 liv.; ou par des annuités constantes de grandeurs & de durées différentes; enfin, d'une infinité de manières plus ou moins convenables. L'essentiel est qu'il rembourse 163 l. 10 f. $6\frac{1}{2}$ d. pour chaque 100 liv. qu'il a reçues.

Temps du rembourse-ment par des annuités constantes.

LIX. Or, s'il veut les rembourser par des rentes égales de 5 liv. par semestre, il faudra qu'il les paie pendant $t = \frac{La - L(a-ci)}{L(1+i)} = \frac{L5 - L(5 - 163{,}527 \times 0{,}025)}{L1{,}025} = 34$ ans 5 mois 15 jours. Ou plus généralement quelle que soit la grandeur du viager, il faudra qu'il paye une rente constante qui lui soit égale, pendant autant de temps qu'il la payeroit, si le viager étoit établi sur l'intérêt usuel auquel les prêteurs accumulent, & qu'il voulût le convertir en annuités ou demi annuités; & comme ce temps est aussi bien celui depuis lequel les rentes viagères à recevoir compenseroient les rentes perdues par la mort des rentiers; je l'appellerai volontiers *le temps moyen de la jouissance d'une rente viagère sur une tête*. Qu'on me permette ici de faire une digression à ce sujet.

Erreur dans l'estimation des rentes viagères.

LX. Une erreur commise par la plupart des spéculateurs en rentes viagères, c'est de croire que la valeur d'une rente constituée sur un assemblage de têtes choisies est égale à la valeur de cette rente qui seroit payée constamment sans diminution, pendant le temps de la vie moyenne des têtes choisies. C'est ainsi qu'après avoir appris par des tables mortuaires que la vie moyenne des enfans de 9 ans est de 47 ans, on imagine qu'une constitution de 10000 liv. de rente, répartie entre 30 têtes de 9 ans, équivaut à une annuité conſtante de 10000 liv. payée pendant 47 ans.

Mais que ſignifie cette détermination de vie moyenne? Elle ſignifie ſeulement que 30 têtes de 9 ans peuvent compter de vivre en ſomme un nombre d'années égal à $47 \times 30 = 1410$. Ainſi, il eſt vrai que le rentier peut compter recevoir en tout 1410 fois la rente que rapporte une ſeule tête, ſomme réellement égale à celle qui ſeroit payée au créancier de l'annuité conſtante pendant 47 ans. Quant aux ſommes qu'ils recevront, il eſt vrai que le rentier & le créancier de l'annuité ſuppoſée ſont dans la même poſition. Mais cette poſition devient très-différente, ſi l'on fait attention aux temps où ils ſeront payés de ces ſommes égales; & tous les calculateurs connoiſſent l'importance de cette conſidération. En effet, tandis qu'à la 47e année le créancier de l'annuité auroit tout reçu, il reſteroit au rentier à recevoir une partie aſſez conſidérable de ce qui lui revient, & même les derniers payemens lui feront faits à une époque aſſez éloignée, après la 80e année. Sa poſition vaut donc bien moins que celle du créancier de l'annuité ſuppoſée; car il eſt bien moins avantageux en général d'être payé plus tard que plus tôt.

Un ſimple coup-d'œil ſuffit pour faire appercevoir cette diſparité entre la poſition d'un rentier ordinaire, & celle de ce créancier imaginaire d'une annuité conſtante; mais le calcul eſt néceſſaire pour une eſtimation rigoureuſe, & j'en ai donné le réſultat. On y voit que que le rentier eſt dans la même poſition qu'un créancier d'une annuité conſtamment égale à la rente entière, qui dureroit pendant 34 ans 5 mois 15 jours, au lieu de 47 ans, comme on le croyoit.

Erreur sur meilleur âge pour les constitutions de rente.

LXI. Une autre erreur qui mérite aussi d'être relevée, quoique moins importante que la précédente, mais qui est bien plus excusable, c'est celle des personnes qui ayant découvert par des tables de mortalité l'âge où la vie moyenne est la plus longue, concluent que cet âge est le plus avantageux pour les constitutions de rente. Cette conclusion est précipitée. L'on devroit seulement conclure que cet âge est celui qui fera sortir du coffre de l'emprunteur la plus grande somme. Mais l'on s'exposera toujours à l'erreur, si l'on conclud sans égard aux époques du payement, qu'il vaut mieux avoir à recevoir une plus grosse somme qu'une moindre. Car si le payement de la plus grosse somme est retardé, il pourra arriver que son escompte fera plus que compenser son excès sur la moindre somme; c'est ce qui arrive dans ce cas. En consultant en détail les tables mortuaires, l'on voit qu'après l'âge de la plus grande vie moyenne, il y a un assez grand nombre de morts promptes, qui diminuant la somme peu après sa constitution, obligent le rentier d'attendre une époque fort éloignée, où la vie extraordinairement longue de quelques-unes de ses têtes compense la mort prompte de celles qu'il a perdues peu après la constitution : mais ces payemens, ainsi extraordinairement retardés, sont plus nombreux quand on constitue à l'âge de la plus longue vie moyenne; & le calcul démontre que ces retards de payemens font plus que compenser le plus grand nombre des payemens qu'on reçoit en consti-

tuant

tuant à cette époque, & il fait voir que c'eſt l'âge de 9, 10 & 11 ans, non celui de 5 ans (âge de la plus grande vie moyenne) qui eſt le plus avantageux pour les conſtitutions de rente. Si l'on veut ſavoir au juſte à quoi ſe réduit cet avantage, l'on trouvera que la conſtitution faite pour l'âge de 5 ans vaut une annuité égale à la rente totale, durant 32 ans 11 m. 25 $\frac{1}{3}$ jours; tandis que cette même annuité dureroit 34 a. 5 m. 14 j., ſi elle repréſentoit la valeur de la conſtitution de rente faite pour l'âge de 9 ou 10 ans (20).

---

(20) Soit KgB la courbe de mortalité; PM une ordonnée qui repréſente le nombre des têtes âgées de 10 ans ſur leſquelles on conſtitue une rente viagère $r=PN$, dont PS eſt le prix $=c$. Soit décrite, à commencer du point N, la logarithmique NH pour l'accumulation de la rente, & à commencer du point S, la logarithmique SH pour le montant du capital & de ſes intérêts. Les deux courbes ſe couperont en H; & l'ordonnée commune & perpendiculaire HD coupant l'axe des abciſſes en D, indiquera ſur cet axe le temps moyen de la jouiſſance de la rente. Mais le temps de la vie moyenne ſera $PQ=\frac{PBM}{PM}$, & le temps de la vie probable ſera repréſentée par l'abciſſe PR, correſpondante à l'ordonnée $RI=\frac{1}{2}PM$. Or, il eſt connu que pour que l'on eût $PQ=PR$, il faudroit que la ligne KgB fût une ligne droite; & voici à-peu-près comment Mr. Lambert l'a démontré. Fig. 7.

$PQ=PR$ donneroit $\frac{PBM}{PM}=\frac{PMFQ}{PM}$, & $PBM=PMFQ$. Or ſoit $PB=x$, $PM=y$, $BQ=z$, $QL=\frac{1}{2}y$; & pour la ligne courbe en général $x=ay^n+by^m+$, &c. cela poſé, on a

$$PBM=\int ydx=\frac{n}{1+n}ay^{n+1}+\frac{m}{1+m}by^{m+1}+\text{\&c.}$$

$$\frac{PMB}{PM}=\frac{n}{1+n}ay^n+\frac{m}{1+m}by^m+\text{\&c.}=PQ$$

de plus, $z=a\left(\tfrac{1}{2}\right)^n y^n+b.\left(\tfrac{1}{2}\right)^m y^m+\text{\&c.}$

$$x-z=a\left[1-1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right]y^n+b\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^m\right]y^m+\text{\&c.}=PQ.$$

Au reste, cette différence entre le temps de la plus grande vie moyenne, & l'âge le plus avantageux pour les constitutions de rente, n'a lieu que pour les rentes qu'on accumule; elle diminuera à mesure que l'on unira

---

Ces deux valeurs de PQ peuvent être ici comparées terme à terme, & même il suffit de comparer les deux premiers; ainsi on aura $\frac{n}{1+n}ay^n = a[1-(\frac{1}{2})^n]y^n$ d'où l'on tire $2^n = 1+n$; équation qui ne donne pour n que deux valeurs réelles, savoir, $n=0$ & $n=1$; il en sera de même pour m; & quand on les admet toutes deux, on trouve en substituant que $x=a+by$: ce qui fait voir qu'il faudroit que KgB fût une ligne droite pour que le temps de la vie moyenne & celui de la vie probable s'accordassent partout. En effet, il est visible que dans ce cas, qui n'est pas dans la nature, $QL=\frac{1}{2}PM$
Fig. 8. & que l'espace $QLB=MFL$; c'est-à-dire, que les années fournies par les BQL personnes, compensent les années perdues par la mort des MFL. Mais, si ces deux espaces représentent des sommes égales, l'on voit bien aussi qu'à cause de la différence des temps de jouissance, & qu'en considération des intérêts, les valeurs de ces sommes au temps P ne sauroient être égales entr'elles; & que c'est en cela que consiste la différence qu'il y a entre le temps de la vie moyenne & celui de la jouissance moyenne d'une rente viagère.

On pourroit trouver par une méthode directe, au moyen de l'équation de la courbe de mortalité (*Voy. la Note* 3), que l'âge, auquel le temps de la vie moyenne est le plus grand, est aux environs de 5 ans : on pourroit de même trouver que si l'on accumule les rentes viagères avec leurs intérêts à 2 ou $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ l'an, le meilleur âge pour constituer en rente viagère sera entre 7 & 8 ans : que si on les accumuloit avec leurs intérêts au 3, $3\frac{1}{2}$, 4 ou $4\frac{1}{2}$, le meilleur âge seroit aux environs de 9 ans; qu'il seroit aux environs de 10 ans si on accumuloit les rentes au 5, 6, 7, & 8 p. $\frac{0}{0}$ & aux environs de 11 ans si on les accumuloit au 9, 10, 11, &c. p. $\frac{0}{0}$, & tous les calculs montrent qu'un enfant naissant a droit pour le même prix à une rente presqu'égale à celle que doit recevoir une personne âgée de 50 ans.

plus de têtes ensemble, & s'évanouira tout-à-fait lorsque l'on constituera en tontine.

LXII. Je reviens à mon sujet. Si l'emprunteur pouvoit consentir à ces 69 payemens de 5 liv. par semestre, les prêteurs y feroient un profit $=(1,032339)^{69}-1$ plus grand que le *maximum* de profit $(1,0308083)^{62}-1$ qu'ils feroient par les rentes viagères. Mais ce seroit une bien grande perte pour l'emprunteur que de s'acquitter de cette manière, puisque le pair seroit pour lui de ne payer la $\frac{1}{2}$ annuité 5 liv. que pendant 26 ans 8 m. 10 jours.

Désavantage pour l'emprunteur dans le remboursement supposé au N. 59.

Abandonnant donc l'idée d'acquitter l'emprunt par 69 payemens de 5 liv., & envisageant la condition des prêteurs sous autre point de vue, cherchons 1°. jusqu'à quel tems il faudroit maintenir aux rentiers accumulateurs le profit d'intérêt $3\frac{8}{99}$, pour que plaçant ensuite la somme d'accumulation qui en résulteroit au $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$, ils eussent au bout de 86 ans le profit 2,7935 pour 100 que leur auroit donné la rente viagère. Soit $Q=1,0308083$; $Q'=1,027935$, $t=31$ ans; $T=86$; nt le temps demandé; on aura $Q^{tn}q^{T-nt}=Q'^{T}$, d'où $nt=\frac{T(LQ'-Lq)}{LQ-Lq}$ $=43,51866=43^{\text{ans}}\ 6^{\text{m.}}\ 7^{\text{jours}}$; ce qui donneroit $(1,0308083)^{43,51866.2}\times(1,025)^{42,48134.2}=(1,027935)^{86.2}$.

Or, on pourroit leur soutenir ce *maximum* de profit d'intérêt de plusieurs manières avantageuses pour l'emprunteur.

Moyens de soutenir aux prêteurs le *maximum* d'intérêt.

LXIII. La plus simple de toutes eût été de recevoir tout simplement leurs capitaux, en leur payant les intérêts sur le pied de $3\frac{8}{99}$ pour 100 (qui est ce *maximum*

Emprunt simple.

même) en laissant aux prêteurs la faculté de joindre *chaque année* à leurs capitaux les intérêts, & de les faire ainsi fructifier pendant $43\frac{1}{2}$ ans, & même pendant un temps indéfini. Les prêteurs y gagneroient, puisqu'ils auroient par ce moyen leurs capitaux placés au $3\frac{8}{99}$ p. %. & l'emprunteur les satisferoit, sans supporter le $4\frac{26}{49}$ p. %. par 6 mois de chaque résidu de l'emprunt en viager. Et pour s'assurer qu'il gagneroit aussi à ce marché, il n'y a qu'à supposer qu'il fait réellement valoir au $3\frac{8}{99}$ p. %. par 6 mois; & chercher quelle seroit sa charge en payant 5 p. %. de rentes viagères, ou les 5 livres de rentes égales qu'il leur devroit pendant 69 semestre. On trouvera que cette charge $C = \frac{5[(1,0308083)^{69}-1]}{0,0308083(1,0308083)^{69}}$ = 142 liv. 5 s. $10\frac{5}{8}$ den.

Condition des prêteurs & de l'emprunteur.

L'emprunteur seroit donc obligé de prendre 42 liv. 5 s. $10\frac{5}{8}$ den. sur son fonds, ou de les emprunter d'une autre manière; tandis qu'en empruntant simplement au $3\frac{8}{99}$ pour %, il n'a besoin que du capital même 100 liv. qu'on lui prête. Ainsi il gagneroit $42\frac{5}{17}$ liv. sur chaque contrat de 100 liv.

Telle seroit la différence de ses charges, s'il regardoit celle d'une rente viagère de 5 p. % par semestre, comme égale à celle de 5 p. %. de rentes constantes pendant 69 semestres : mais en ne changeant pas le viager, sa charge seroit le prix de 5 p. 100 de rentes viagères établies sur un intérêt perpétuel de 3,08083 p. % & seroit ici = 139,205550 liv; *ce qui réduiroit l'économie à 39 millions 205 mille liv. sur un emprunt de 100 millions, sans nuire aucunement à l'avantage des prêteurs.*

LXIV. On peut dire que l'emprunteur gagneroit à ce marché ce que les prêteurs perdroient en ne plaçant qu'au $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ la rente qu'ils reçoivent. Si les prêteurs ne pouvoient pas même replacer leurs rentes, & qu'ils ne fiſſent que les accumuler ſans intérêts, leurs capitaux ſe trouveroient néanmoins augmentés d'un certain intérêt, vu la grandeur de la rente, quoique beaucoup plus petit. L'emprunteur qui continueroit à leur payer la même rente, pourroit ne rien gagner à ce que les prêteurs ne les fiſſent pas valoir; mais il pourroit auſſi y gagner, ſi les prêteurs n'exigeoient de lui que le profit qu'ils auroient fait dans cette ſuppoſition. Il ne faut donc pas demander ici qui eſt ce qui perd quand tous deux gagnent, comme on me l'a demandé; par la même raiſon qu'il ne s'enſuit pas néceſſairement de ce que quelqu'un ne place pas ſon argent, que quelqu'un d'autre en profite, &c.

Fauſſe apparence de paradoxe.

LXV. J'ai ſuppoſé ici que l'emprunteur pouvoit faire valoir au $3\frac{8}{95}$; parce qu'il eſt cenſé que tout emprunteur, quel qu'il ſoit, ne prend des capitaux que pour faire des profits; tel, par exemple, emprunte au 5 pour faire valoir au 10, & pourroit par conſéquent payer le 6. Il eſt vrai qu'on pourroit imaginer qu'un emprunteur ne fît un emprunt que pour payer une dette; mais alors il feroit une mauvaiſe affaire pour lui-même & pour les prêteurs, & il ne trouveroit pas de crédit; mais ſi, avec des dettes, il a, d'un autre côté, quelqu'affaire avantageuſe, comme commerce, manufacture, culture, &c. ce qui doit être, on peut le conſidérer comme payant ſes dettes avec les fonds conſacrés

Suppoſition qui ſert de fondement aux moyens propoſés.

à cette affaire ; & empruntant pour faire valoir dans ce commerce ou manufacture à un plus haut intérêt qu'il ne s'engage à payer. *C'est ainsi que les sujets d'un monarque font face aux engagemens des emprunts qu'il fait, & il ne fait des emprunts que pour ne pas priver les uns, de fonds que leur industrie fait valoir à un taux d'intérêt beaucoup plus haut que celui auquel il emprunte, & pour faire servir de cette manière les capitaux des autres au profit de la nation.*

En général je suppose, dans tout cet ouvrage, qu'un emprunteur fait valoir à un intérêt un peu au-dessus du taux ordinaire ; parce qu'il est naturel que ceux qui font travailler les fonds, gagnent plus que ceux qui prêtent simplement leurs capitaux. Sans cette supposition, on ne prêteroit pas, ou du moins on ne prêteroit qu'à court terme ; & il paroît qu'en général la mesure de la confiance consiste, ou dans l'idée qu'on se fait des fonds qui appartiennent à l'emprunteur, ou dans les profits qu'il est à portée de faire. Or, comme cette dernière cause de confiance est évidemment la meilleure, puisqu'elle seule peut établir la permanence des profits que font les prêteurs ; il est donc de l'intérêt de ceux-ci d'y concourir ; & c'est y concourir que de diminuer la charge & les fraix qui sont en pure perte. C'est par de telles raisons qu'il pourroit y avoir de l'avantage pour les uns & pour les autres à commuer, par exemple, une rente viagère de 5 pour 100 par semestre, sur l'âge de dix ans, en un simple prêt annuel au $3 \frac{8}{39}$ p. $\frac{0}{0}$. pendant $43 \frac{1}{2}$ ans, & même en un simple prêt annuel au 2,7935, soit au $2 \frac{73}{92}$ pour 100 pendant 86 ans, &c. Dans ces deux cas on éviteroit à l'emprunteur une trop grande charge d'intérêts, parce qu'une partie de ceux qu'il ſupporte en payant le rente viagère *chôme* dans les mains des prêteurs, qui ne peuvent enſuite retirer que le $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$. par ſix mois. Si l'emprunteur pouvoit ſupporter le 4 p. 100 par ſemeſtre, les prêts annuels du capital & des intérêts pourroient ne ſe faire que pendant $nt = \frac{86(L.1{,}027935 - L.1{,}025)}{L1{,}04 - L1{,}025}$ $= 16$ ans 11 mois 3 jours; car depuis lors les rentiers faiſant valoir au $2\frac{1}{2}$ pour 100 par ſemeſtre, trouveroient au bout de 86 ans une ſomme d'accumulation égale à celle que leur auroit donné l'accumulation de la rente viagère : ainſi de ſuite.

LXVI. Mais cherchons ſi dans le ſyſtême des annuités, il n'y auroit pas quelque moyen de procurer aux uns & aux autres le même avantage.

Moyen de ſoutenir le *maximum* d'intérêt par des annuités.

Il eſt d'abord évident que, s'il s'agit de ſoutenir le *maximum* de profit 0,0308083 : on pourra chercher le temps pendant lequel une certaine demi annuité donnera ce profit; & que ſi au bout de ce temps les rentiers reprêtoient de nouveau toute l'accumulation pour le même temps, ils ſoutiendroient par là leur profit. Reſte à le leur maintenir de façon que l'emprunteur y trouve auſſi ſon compte.

S'il ne s'agiſſoit de leur ſoutenir cet intérêt que juſqu'à un temps quelconque, les $\frac{1}{2}$ annuités pourroient être de 5 pour 100 comme la rente, ou plus petites, ou plus grandes.

LXVII. Et 1°. ſi l'on prenoit des $\frac{1}{2}$ annuités de 5 p. $\frac{0}{0}$, il faudroit chercher la plus petite racine de l'équation

$aq^t - iQ^t - a = o$; a étant $=0,05$, $q=1,025$ & $Q=1,0308083$; on trouveroit $t=40$ semestres environ (la plus grande valeur de $t=110,8008$ semestres) au bout desquels les prêteurs auroient $(1,0308396)^{40}$; l'emprunteur ne supporteroit pas tout-à-fait le 4 p. $\frac{o}{o}$, au lieu qu'il supporte le $4\frac{25}{49}$ en payant le viager. Si donc il pouvoit faire valoir au 4 p. $\frac{o}{o}$ par 6 mois, il gagneroit à ce changement le $\frac{25}{49}$ p. $\frac{o}{o}$ par 6 mois sur chaque résidu : le remboursement seroit fini au bout de 20 ans; & les rentiers n'auroient qu'à reprêter toute la somme d'accumulation pour être de même remboursés par 40 autres $\frac{1}{2}$ annuités de 5 p. $\frac{o}{o}$; l'emprunteur supporteroit encore le 4 p. $\frac{o}{o}$ d'intérêt; & les prêteurs maintiendroient le profit d'intérêt 3,08083 p. $\frac{o}{o}$ jusqu'au bout de 40 ans, ainsi de suite.

Essais divers.

Annuité égale à la rente.

LXVIII. En second lieu, le *maximum* de profit d'intérêt que pourroit donner la $\frac{1}{2}$ annuité 5 p. $\frac{o}{o}$ accumulée au $2\frac{1}{2}$ p. $\frac{o}{o}$ se trouvant à 61 semestres & étant $=0,032465$ $>$ que $0,0308083$: il y auroit donc une plus petite $\frac{1}{2}$ annuité qui feroit le même effet que la $\frac{1}{2}$ annuité 5 rélativement au profit d'intérêt 3,08083 p. $\frac{o}{o}$ que donne la rente viagère. La plus petite de toutes ces $\frac{1}{2}$ annuités seroit $a' = \dfrac{iq^{\frac{tq^t}{q^t-1}}}{q^t - 1}$, & comme on doit avoir de même $\dfrac{a'(q^t-1)}{i} = Q^t$, on doit aussi avoir $\dfrac{iq^{\frac{tq^t}{q^t-1}}}{q^t - 1} \times \dfrac{(q^t-1)}{i} = Q^t$; d'où je tire $t = \dfrac{L(LQ) - L(LQ - Lq)}{Lq} = 71,0426$ semestres, ou 35 ans 6 mois $7\frac{19}{27}$ jours. Ce qui donne $a = 4,62166$ p. $\frac{o}{o}$. Mais cette demi-annuité que nous pourrions rendre très-avantageuse

Annuité plus petite.

très-avantageuse dans un autre système d'emprunt exposé plus bas, seroit ici la moins avantageuse de toutes; parce que, quoique l'emprunteur ne supportât pas le $4\frac{2}{8}$ p. $\frac{0}{0}$ qui est un intérêt plus petit que celui sur lequel est établi le viager 5 p. $\frac{0}{0}$, cet intérêt seroit cependant le plus grand de tous ceux qu'il auroit à supporter par des $\frac{1}{2}$ annuités. Et en général, il ne convient pas à un emprunteur de changer selon ces conditions de grandes annuités en de plus petites; & par la raison contraire, il lui conviendroit de faire l'opposé.

LXIX. Nommant donc t la durée connue de l'annuité a qui seroit à convertir; $t-x$ le temps pendant lequel il faudroit payer une plus grande annuité A pour que les prêteurs eussent au bout de ce temps $t-x$ le même profit d'intérêt qu'ils auroient au bout du temps t par l'annuité a, on auroit $A = \frac{i}{q^{t-x}-1}\left\{\frac{a(q^t-1)}{i}\right\}^{\frac{t-x}{t}}$. La plus grande valeur pour A auroit lieu lorsqu'on feroit $t-x=1$; on auroit dans ce cas ci $A = 1{,}0308083$; ce qui changeroit l'emprunt en un simple prêt annuel au $3\frac{8}{99}$ p. $\frac{0}{0}$; mais on pourroit donner d'autres valeurs à volonté à $t-x$ & par-là à A, comme on le verra plus bas. Annuité plus grande.

LXX. Mais puisqu'il faut soutenir aux prêteurs le profit d'intérêt 3,08083 p. $\frac{0}{0}$ pendant $43\frac{1}{2}$ ans ou 87,03732 semestres; il faudra pour abaisser l'intérêt que supporteroit l'emprunteur, diviser ce temps en parties égales, chercher l'annuité qui donneroit au bout de chacune de ces parties de temps ou époques, le profit d'intérêt $3\frac{8}{99}$; regarder le remboursement de la rente viagère comme fait à la première époque; mais laisser aux ren- Règles pour produire cet effet de la manière la plus avantageuse à l'emprunteur.

tiers la faculté de reprêter toute l'accumulation pour être rembourſés à la ſeconde époque de la même manière qu'ils l'ont été de la rente viagère; ainſi de ſuite juſqu'à $43\frac{1}{2}$ ans. Il eſt manifeſte que l'emprunteur diminueroit par ce marché le taux exceſſif d'intérêt qu'il paie par la rente viagère; & les prêteurs y trouveroient de plus l'avantage d'avoir le *maximum* d'intérêt $3\frac{8}{99}$ ſoutenu juſqu'à $43\frac{1}{2}$ ans, au lieu de ne l'avoir que juſqu'à 31 ans.

Par exemple, ſi l'on ne faiſoit qu'un ſeul rembourſement qui durât 87 ſemeſtres, il ſuffiroit ici de payer la $\frac{1}{2}$ annuité $a = \frac{iQ^{87}}{q^{87}-1} = 4,62771$ p. $\frac{0}{0}$; mais l'emprunteur ſupporteroit encore à ce marché le $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ à très-peu près.

Diviſant donc ce temps en 3 époques de 29 ſemeſtres, l'annuité qui donneroit aux prêteurs $(1,0308083)^{29}$ feroit $a = \frac{iQ^{29}}{q^{29}-1} = 5,759677$ p. $\frac{0}{0}$; & l'emprunteur ne ſupporteroit plus à ce marché que le 3,7968 p. $\frac{0}{0}$.

Que s'il ne pouvoit pas encore ſupporter ſans perte cet intérêt, il faudroit diviſer les 87,037 ſemeſtres en un plus grand nombre d'époques; & en général j étant l'intérêt que l'emprunteur peut ſupporter ſans perte; K étant $= 1 + j$; $Q = 1 +$ le *maximum* de profit d'intérêt de la rente viagère; $q = 1 + i$; & i l'intérêt auquel les prêteurs accumulent; l'équation d'où il faudra tirer la valeur du temps x pendant lequel chaque rembourſement devra durer ſera $iQ^x - j(q^x - 1) - i\left(\frac{Q}{K}\right)^x = 0$: ce qu'on pourra opérer facilement par la règle de double fauſſe poſition. Soit donc $j = \frac{3\frac{1}{2}}{100}$, $i = 0,05$, $Q = 1,0308083$;

on trouvera $x = 5{,}2432$ semestres, ce qui donne 16,6 prêts & remboursemens par des $\frac{1}{2}$ annuités de 21,20576 p. $\frac{0}{0}$.

LXXI. Il y a mieux, l'emprunteur pourroit diminuer & sa charge & le nombre trop fréquent des emprunts ci-dessus; en offrant aux capitalistes d'accumuler chez lui leurs rentes à un certain taux. Par exemple, dans ce cas, il pourroit faire le remboursement de l'emprunt en 10 ans, par des annuités de 14,43879 p. $\frac{0}{0}$, en laissant *chaque année* aux prêteurs la faculté de convertir en tout ou en partie cette rente en une autre de 29,22178 p. $\frac{0}{0}$, payable 10 ans après. Les prêteurs auroient donc le choix entre une série de dix annuités de 14,43879 p. $\frac{0}{0}$, payables dans les dix premières années, ou une série de dix annuités de 29,22178 pour 100, dont la première annuité se payeroit à la fin de la onzième année, & la dernière à la fin de la vingtième. Si l'emprunteur offroit de nouveau aux capitalistes de convertir les rentes de cette dernière série en dix payemens annuels de 59,1402 p. $\frac{0}{0}$. du capital primitif; ils auroient au bout de 30 ans une somme d'accumulation $=(1{,}069177)^{30}$: ce qui feroit au bout de 86 ans $(1{,}069177)^{30} \times (1{,}05)^{56} = 1{,}05665^{86} = (1{,}02795)^{172}$; même montant que par la rente viagère de 5 p. $\frac{0}{0}$. par semestres. Mais l'emprunteur ne supporteroit par cette forme d'emprunt que le 7,30443 p. $\frac{0}{0}$ par an, soit le 3,5879 p. $\frac{0}{0}$ par 6 mois, au lieu du 4,5306 qu'il supporte par la rente viagère: ou comme le prix d'une rente viagère de 5 p. $\frac{0}{0}$ par 6 mois, établie sur un perpétuel de 3,5879 p. $\frac{0}{0}$ aussi par 6 mois, seroit $= 122{,}7$, il économiseroit plus de 22 $\frac{1}{2}$ millions sur 100 millions d'emprunt en ce viager.

Si l'on vouloit faire usage de cette méthode, on commenceroit par chercher l'intérêt j ou $k-1$ de l'emprunteur par cette équation $\frac{jk^{nt}}{k^t-1}-\frac{iQ^tT}{(q^t-1)q^{T-nt}}=0$. Dans le cas exposé ci-dessus, cette équation devient $\frac{0,0730443(1,0730443)^{3.10}}{(1,0730443)^{10}-1}-\frac{0,05\times(1,05665)^{86}}{(1,05^{10}-1)\times(1,05)^{86-30}}=0$, au moyen de quoi l'on a trouvé $a=\frac{jk^t}{k^t-1}=0,1443879$; $ak^{10}=0,2922178$; & $ak^{20}=0,5914020$ (21).

---

(21) L'emprunteur pourroit de même gagner 16 millions & demi sur 100 d'emprunt, en convertissant de la même manière une rente viagère de 4 & demi pour cent par semestre; car il n'auroit qu'à offrir aux prêteurs le choix de trois séries de dix annuités, savoir de 14,14059 pour 100; de 27,43453 pour 100; & de 53, 2264 pour 100. Ceux d'entre les capitalistes qui choisiroient la troisième, auroient au bout de 30 ans un montant $=(1,065429)^{30}$; & au bout de 86 ans $(1,065429)^{30}\times(1,05)^{56}=(1,055357)^{86}=(1,0273055)^{172}$, comme par la rente viagère de 4 & demi pour 100 par 6 mois. Mais l'emprunteur ne supporteroit que le 3,3693 pour 100, au lieu du 4,0182 par 6 mois, qu'il supporte en payant la rente de 4 & demi pour 100 par semestre sur une tête de 10 ans, choisie comme celles de la table de M. de Parcieux. Ou, comme la charge de cette rente viagère seroit $=116,53$, lorsque l'emprunteur ne feroit valoir qu'au 3,3693 pour 100 chaque résidu de l'emprunt; il s'ensuit qu'il gagneroit par cette conversion plus de 16 & demi millions sur 100 millions empruntés.

Si au lieu d'avoir à rembourser des rentes viagères, il s'agissoit de faire un nouvel emprunt, d'en appliquer l'argent à quelqu'entreprise pour laquelle il ne fût pas nécessaire d'avoir les fonds tout-à-la-fois, & de diviser l'emprunt par parties, de telle sorte que les capitalistes fussent intéressés à le suivre pendant tout le temps de sa durée; cela pourroit s'opérer d'une infinité de manières, mais fort simplement de la manière suivante.

LXXII. Je n'ai pas besoin de faire voir comment on pourroit porter le goût des prêteurs à ces emprunts, en diminuant un tant pour 100 sur ces annuités, pour Remarques.

Supposons qu'il fallût 100 millions dans l'espace de 10 ans, on pourroit composer cet emprunt de 100000 billets de 1000 liv. chacun; mais au lieu de faire donner chaque année le montant de 10000 billets pour recevoir 10 millions, on pourroit faire donner toutes les années la dixième partie de chaque billet, soit 100 liv.; en outre, tirer au sort à la fin de chaque année un certain nombre de billets, par exemple 10000, pour être complettement acquittés par les propriétaires, afin qu'ils jouissent dès ce moment là d'une certaine suite de rentes annuelles, qui les rembourseroient de leurs capitaux & de leurs intérêts dans un assez court espace de temps, tel que 10 ans; mais on leur laisseroit, comme ci-dessus, l'avantage d'accumuler ces rentes au denier de l'emprunt, & de choisir le montant de cette accumulation dans deux ou trois séries différentes.

Supposons, par exemple, ce denier j ou $k-1=6$ & demi pour 100.

$S=100{,}000000 =$ 100 millions.

$B= \quad 1000 =$ mille livres, montant d'un billet.

$nB=100000\times 1000 =$ le montant des cent mille billets.

$T=$ 10 ans, durée de l'emprunt partiel.

$t=$ 10 ans, durée de chaque suite de remboursement.

Si l'emprunteur ne tenoit pas compte aux capitalistes de l'intérêt au j pour 1 des portions du capital qu'il a reçues; les sommes z qu'il convertiroit chaque année en rentes, seroient égales entr'elles, & $=\frac{NB}{T}. = 10{,}000000$. Mais à la x^{eme} année, l'accroissement de leurs intérêts les fait être $=\frac{NB}{TT}\left\{(T-x)+k\left(\frac{k^x-1}{j}\right)\right\}$; ensorte que la rente r par laquelle l'emprunteur remboursera, dans l'espace de t ans, à commencer dès le temps x, la somme du x^{eme} tirage, sera généralement $r=\frac{NB}{TT}\left\{(T-x)+k\left(\frac{k^x-1}{j}\right)\right\}.\frac{jk^t-1}{k^t-1}$. Ce qui donne pour la valeur des annuités en faire des lots ; parce que c'eſt un moyen connu, qui a toujours fort bien réuſſi, & qui ne demandoit

	de la 1^{ere}. ſérie.	de la 2^{e}. ſérie.	de la 3^{e}. ſérie.
du 1er. tirage.	$r=0{,}1314637$ ----	$rk^{10}=0.2467754$ ----	$rk^{20}=0{,}4632314$
du ſecond.	$r=0{,}1332180$ ----	$rk^{10}=0{,}2500684$ ----	$rk^{20}=0{,}4694128$
du troiſième.	$r=0{,}1359331$ ----	$rk^{10}=0{,}2551650$ ----	$rk^{20}=0{,}4789800$
du quatrième.	$r=0{,}1396754$ ----	$rk^{10}=0{,}2621900$ ----	$rk^{20}=0{,}4921667$
du cinquième.	$r=0{,}1445020$ ----	$rk^{10}=0{,}2712636$ ----	$rk^{20}=0{,}5091991$
du ſixième.	$r=0{,}1505073$ ----	$rk^{10}=0{,}2825230$ ----	$rk^{20}=0{,}5303346$
du ſeptième.	$r=0{,}1577422$ ----	$rk^{10}=0{,}2961138$ ----	$rk^{20}=0{,}5558275$
du huitième.	$r=0{,}1662976$ ----	$rk^{10}=0{,}3121634$ ----	$rk^{20}=0{,}5859735$
du neuvième.	$r=0{,}1762590$ ----	$rk^{10}=03308625$ ----	$rk^{20}=0{,}6210743$
du dixiéme.	$r=0{,}1877137$ ----	$rk^{10}=0{,}3523645$ ----	$rk^{20}=0{,}6614365$

Les propriétaires des billets échus au premier tirage auroient au bout de 30 ans, $0{,}4632314 \times \frac{(1{,}05)^{10}-1}{0{,}05} + 0{,}05 \times 0{,}9 \times (1{,}05)^{29} = (1{,}061614)^{30}$, ou leurs capitaux avec leurs intérêts compoſés au $6\frac{5}{31}$ p. 100 ; & au bout de 40 ans $(1{,}058638)^{40}$, ou leur argent placé à $5\frac{19}{22}$ pour cent. Quant à ceux dont les rentes de la première ſérie ne commenceroient à être payées qu'au bout de 10 ans, & qui ne voudroient les toucher qu'à la troiſième, ils auroient au bout de 40 ans, pour chaque unité de capital, $0{,}6614365 \times \frac{(1{,}05)^{10}-1}{0.05} + \frac{0{,}1 \times (1{,}05)^{21}}{0{,}05} -$

$$- \frac{0{,}1 \times (1{,}05)^{30}}{0{,}05} \cdot (1 - 0{,}05 \times 9) = (1{,}05667)^{40},$$ ou le montant de leurs billets, avec les intérêts au $5\frac{2}{3}$ pour 100.

L'emprunteur pourroit encore donner un peu plus d'appas à ces ſortes d'emprunts, ſans augmenter le taux de l'intérêt, en tirant parti de l'eſpérance que chacun a de vivre. Pour cela, il n'auroit qu'à offrir aux capitaliſtes, au lieu ces annuités conſtantes, des rentes viagères ſur une ou pluſieurs têtes de différentes claſſes d'âge, & croiſſantes chaque année pendant 10, 20, ou 30 ans, en raiſon de l'extinction des rentiers. Je ne puis pas m'étendre beaucoup ici là-deſſus ; & je n'en donnerai qu'un exemple, en ſuppoſant que les rentes ſoient conſtituées à chaque tirage ſur des têtes iſolées & âgées de n ans. Il eſt que d'être établi sur de bons principes. On remarquera

---

aisé de voir, en consultant la table de mortalité des tontiniers, publiée par M. de Parcieux, que l'on auroit à multiplier les rentes de chaque série, comme on le voit ci-dessous.

la première.	$\times\frac{872}{872}=1,$
la seconde.	$\times\frac{872}{866}=1,0069284$
la troisième.	$\times\frac{872}{860}=1,0139535$
la quatrième.	$\times\frac{872}{854}=1,0210773$
la cinquième.	$\times\frac{872}{848}=1,0283019$
la sixième.	$\times\frac{872}{842}=1,0356296$
la septième.	$\times\frac{872}{835}=1.0443112$
la huitième.	$\times\frac{872}{828}=1,0531400$
la neuvième.	$\times\frac{872}{821}=1,0621190$
la dixième.	$\times\frac{872}{814}=1,0712530$

de la première série de chaque tirage.

la première.	$\times\frac{872}{806}=1,0818860$
la seconde.	$\times\frac{872}{798}=1,0927220$
la troisième.	$\times\frac{872}{790}=1,1037970$
la quatrième.	$\times\frac{872}{782}=1,1159000$
la cinquième.	$\times\frac{872}{774}=1,1266150$
la sixième.	$\times\frac{872}{766}=1,1383810$
la septième.	$\times\frac{872}{758}=1,1503960$
la huitième.	$\times\frac{872}{750}=1,1626660$
la neuvième.	$\times\frac{872}{742}=1,1752020$
la dixième.	$\times\frac{872}{734}=1,1880110$

de la seconde série de chaque tirage.

la première.	$\times\frac{872}{726}=1,2010020$
la seconde.	$\times\frac{872}{718}=1,2144850$
la troisième.	$\times\frac{872}{710}=1,2281700$
la quatrième.	$\times\frac{872}{702}=1,2421660$
la cinquième.	$\times\frac{872}{694}=1,2564840$
la sixième.	$\times\frac{872}{686}=1,2711370$
la septième.	$\times\frac{872}{678}=1,2861360$
la huitième.	$\times\frac{872}{671}=1,2995530$
la neuvième.	$\times\frac{872}{664}=1,3132530$
la dixième.	$\times\frac{872}{657}=1,3272450$

de la troisième série de chaque tirage.

la première.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-726)^2}=1,0288420$
la seconde.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-718)^2}=1,0321940$
la troisième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-710)^2}=1,0357480$
la quatrième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-702)^2}=1,0395090$
la cinquième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-694)^2}=1,0434800$
la sixième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-686)^2}=1,0476670$
la septième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-678)^2}=1,0526730$
la huitième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-671)^2}=1,0561140$
la neuvième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-664)^2}=1,0603300$
la dixième.	$\times\frac{(872)^2}{(872)^2-(872-657)^2}=1,0647260$

de la troisième série de chaque tirage. *

de plus, que si au lieu d'annuités constantes, on employoit, du moins pour la dernière série, des annuités croissantes; telles que celles dont j'ai déjà parlé; plus elles seroient croissantes, moins le taux d'intérêt de l'emprunteur différeroit du *maximum* de profit d'intérêt $\varrho - 1$. Ainsi, de l'efficacité plus ou moins grande des divers moyens que je viens d'exposer, pour diminuer la charge qu'un emprunteur supporte dans un viager de 5 pour 100 par semestre; il suit une vérité qui auroit pu paroître auparavant un paradoxe: savoir, que non seulement on peut faire ensorte qu'un emprunt de 5 pour 100 soit moins onéreux qu'un viager de $4\frac{1}{2}$; mais qu'on peut rendre cette charge presqu'égale à celle d'un viager de 3,5996 pour 100 par 6 mois; parce que celui-ci résulte d'un intérêt perpétuel de 3,08083 p. 100 par 6 mois; comme il est facile de le trouver, au moyen de la règle de double fausse position, & des nombres que j'ai donné au N°. XLIV.

Il n'y a peut-être pas de moyens plus pratiquables que ceux que je viens d'exposer; mais je ferai voir qu'il ne seroit pas impossible d'abaisser presqu'au taux ordinaire; cet intérêt excessif que l'emprunteur supporte par les rentes viagères. En attendant, comme je veux donner deux exemples différens à la fois, je supposerai encore un emprunt remboursable par une rente viagère

Exemple d'une rente viagère sur deux têtes.

* Dans le cas où au lieu de constituer sur une tête de 11 ans, on constitueroit sur deux de ce même âge, & où la rente seroit payée pendant dix années de la vie d'une de ces deux têtes, à commencer lorsqu'elles seroient âgées de 31 ans.

de

de 9 pour 100 sur deux têtes, laquelle les rentiers ne peuvent accumuler qu'à 5 p. 100.

LXXIII. Cette rente pourroit, selon certaines tables mortuaires, revenir à une annuité payable pendant 50 ans; au bout duquel temps les rentiers auroient pour le montant d'une livre de prêt & de son profit d'intérêt $(1{,}06048)^{50} = 18{,}8417$. [Si l'on plaçoit dès-lors pendant 40 ans à 5 pour 100, on trouveroit que $(1{,}06048)^{50} \times (1{,}05)^{40} = (1{,}05581)^{90}$; ensorte qu'au bout de 90 ans, on se trouveroit avoir retiré l'intérêt $0{,}05581 >$ que $0{,}055708$ que la rente viagère auroit donné de 6 à 96 ans, en suivant la table de mortalité de M. de Kerseboom. Et il se trouveroit encore qu'on auroit eu pendant 50 ans un intérêt $0{,}06048 >$ que $0{,}06045$, qui est le plus grand intérêt que donne la rente viagère, en suivant cette même table; & qui n'a lieu que pour environ 36 ans seulement]. Conversion en une annuité de 50 ans.

De plus, si le débiteur consentoit à cette conversion, les créanciers jouiroient au bout de 34 ans 6 mois 28 jours d'un profit d'intérêt $(1{,}061699366)^{\underline{34{,}57575}}1$ qui est le *maximum* de profit que donnent les annuités constantes de 9 p. $\frac{0}{0}$; & qui, si les prêteurs pouvoient soutenir ce même intérêt jusqu'à 50 ans, donneroit $(1{,}061699366)^{50} = 19{,}95614 > 18{,}8417$: ce seroit leur donner beaucoup plus qu'on ne leur doit; & notre but n'est pas de soutenir aux prêteurs ce *maximum* d'intérêt des annuités. Remarquons cependant encore en passant, qu'au marché de 50 annuités, l'emprunteur supporteroit le 8,8716 p. $\frac{0}{0}$, soit le 8 $\frac{34}{39}$; & qu'il vaudroit mieux pour tous que l'emprunt se fît à simple prêt au 6 $\frac{17}{100}$ p. $\frac{0}{0}$.

Si l'emprunteur payoit l'annuité 9 p. $\frac{0}{0}$ seulement pendant 34 $\frac{1}{2}$ ans ; les prêteurs auroient au bout de 50 ans, $(1{,}06169936)^{34,5} \times (1{,}05)^{15,5} = (1{,}0581534)^{50}$. Cela ne suffiroit donc pas pour leur donner $(1{,}06048)^{50}$ comme on le doit ; il faudroit pour cela à la fin des 34 $\frac{1}{2}$ années leur fournir un moyen de faire valoir l'accumulation à plus de 5 p. $\frac{0}{0}$.

Ou en deux de 25.

LXXIV. Si au lieu d'un seul emprunt de 50 annuités, on en faisoit d'abord un de 25 ; & qu'au bout de 25 ans, les rentiers reprêtassent toute l'accumulation qu'ils auroient faite ; ils auroient au bout de 50 ans, le même profit d'intérêt que celui qu'ils auroient fait au bout de 25 ans ; c'est-à-dire, $(1{,}0603518)^{25\times 2}$ qui est un peu plus petit que $(1{,}06048)^{50}$. C'est cependant, dans le cas dont il s'agit, la division des 50 annuités qui donne le plus grand produit au bout de 50 ans ; comme il est aisé de le sentir sans calcul. Et au surplus, soit $T=50$, & t le temps au bout duquel devroit finir le premier emprunt ou remboursement ; on aura cette équation $\frac{a(q^t-1)}{i}$ $\times \frac{a(q^{T-t}-1)}{i} = Q^T$. Or, si l'on différencie l'équation en faisant t & Q variables ; on trouvera par la méthode des *maxima* & des *minima*, que pour que Q, soit le plus grand possible, en faisant deux emprunts remboursables par t & T-t annuités, au lieu d'un seul remboursable par le nombre T, il faudra que $t=\frac{T}{2}$: d'où $Q^T=\frac{a^2(q^{\frac{T}{2}}-1)^2}{i^2}$. Mais si l'on n'exige pas que Q soit le plus grand possible, on aura pour t deux valeurs dont l'équation

Manière la plus avantageuse de partager en deux la durée d'une annuité.

$$t=\frac{L\{a^2(q^T+1)-i^2Q^T\pm\sqrt{[a^2(q^T+1)-i^2Q^T]^2-4a^4q^T}\}-L2a^2}{Lq}$$

se réduit à $\frac{T}{2}$, lorsque $i^2Q^T=a^2(q^{T:2}-1)^2$; ou, ce qui revient au même; lorsque les quantités sous le signe radical se détruisent. Soit $T=50$, $q=1,05$, $Q=1,055$; on aura $t=37,1035$, ou $=12,8965$.

Mais il ne faut pas chercher à faire des emprunts de deux nombres inégaux d'annuités égales, pour équivaloir à un seul emprunt; parce qu'ils seroient moins avantageux aux uns & aux autres. Les emprunts égaux sont ceux qui donneront, dans un même espace de temps, les profits les plus grands; mais leur nombre peut être variable. Dans le cas ci-dessus, un seul emprunt remboursable par 50 annuités donneroit un profit d'intérêt un peu plus grand que ne donneroient deux emprunts de 25 annuités faits comme je l'entends : dans d'autres cas, il seroit plus avantageux d'en employer davantage; car supposons une suite de 104 annuités de 9 p. $\frac{0}{0}$, elles donneroient aux rentiers le profit $(1,055887)^{104}-1$. Supposons qu'on divisât cet emprunt en deux temps égaux, dont les remboursemens fussent chacun de 52 annuités; les rentiers auroient le profit $1,060255^{104}-1$, & si on le divisoit en 3 temps, chaque remboursement dureroit $34\frac{2}{3}$ ans; ce qui approche si fort du temps qui donne le *maximum* de profit dans les annuités de 9 p. $\frac{0}{0}$ que les prêteurs auroient au bout de 104 ans $(1,0616995)^{104}-1$. En général, pour qu'une telle division donne le plus grand produit possible, il faudra que dans l'équation $\frac{a^n(q^{T:n}-1)^n}{i^n}=Q^T$ ou $aq^{T:n}-iQ^{T:n}-a=0$; n soit un *diviseur* de T

qui laiſſe pour quotient un nombre $\frac{T}{n}$ le plus près poſſible du nombre qui indique le temps du *maximum* de profit.

Autres eſſais.

LXXV. S'il ne s'agiſſoit, dans notre exemple ci-deſſus, que de ſoutenir pendant 26, 52, 78, &c. ans le profit $(1{,}06048)^{50}-1$ fait au bout de 50 ans, on pourroit ſe ſervir de la plus petite valeur de T dans l'équation $aq^T - iQ^T - a = o$; & comme on trouve auſſi bien $T =$ $= 26{,}\ 0758$ ans, que $T=50$, lorſque $a=0{,}09$, $q=1{,}05$ & $Q=1{,}06048$; l'emprunteur pourroit faire quelques emprunts rembourſables pendant 26 ans au lieu d'un ſeul rembourſable en 50. Il ne ſupporteroit plus que le $7\frac{7}{10}$ p. % au lieu du $8\frac{34}{39}$ qu'il ſupporte dans les 50 annuités; & les rentiers lui reprêtant de 26 en 26 ans le montant de l'accumulation, ils trouveroient au bout de 26, de 52, de 78, de 104, de, &c. années leurs capitaux, avec le montant de leurs intérêts au 6,048 p. %; ce qui pourroit fort convenir à l'emprunteur auſſi bien qu'à eux.

LXXVI. La plus petite annuité qui donneroit une fois le profit d'intérêt 6,048 p. % ſeroit ici $a = \frac{iq^{\frac{tq^t}{q^t-1}}}{q^t - 1} = 8{,}64047$ p. %, & devroit être payée pendant 36, 42322 ans; mais quoiqu'ici cette annuité lui convînt mieux que la rente viagère, elle lui conviendroit moins que l'annuité 9 p. %, payable pendant 26 ans; car avec le même intérêt $7\frac{7}{10}$ qui lui ſuffit pour l'annuité 9 pendant 26 ans, il ne pourroit payer l'annuité 8,64047 ou $8\frac{57}{89}$ que pendant 26 ans 10 m. $23\frac{1}{2}$ j. $<$ que 36 ans 5 m. $2\frac{1}{2}$ j. qui eſt le temps pendant lequel il la devroit payer.

LXXVII. Au contraire s'il rembourfoit en payant pendant 15 ans l'annuité 11,18207 ou 11 $\frac{2}{11}$ p. $\frac{0}{0}$ environ, il donneroit aux prêteurs le profit d'intérêt 0,06048; & en ne fupportant que le 7 $\frac{7}{10}$ p. $\frac{0}{0}$ d'intérêt, il lui refteroit encore entre les mains de quoi leur payer la rente 11 $\frac{2}{11}$ p. $\frac{0}{0}$ pendant 8 mois 22 jours, qui feroit fon bénéfice : ou bien s'il leur payoit pendant 10 ans l'annuité $A=14,3027$, foit 14 $\frac{23}{76}$ p. $\frac{0}{0}$, il les fatisferoit également & en gagnant de dix en dix ans ce qui leur reviendroit pour 5 m. 1 $\frac{10}{27}$ j. : ou bien s'il leur payoit pendant 5 ans l'annuité

$$A = \frac{i}{q^{t-x}-1} \left\{\frac{a(q^t-1)}{i}\right\}^{\frac{t-x}{t}} = \frac{0,05}{(1,05)^5-1} \left(\frac{0,09(1,05)^{50}-1}{0,05}\right)^{\frac{5}{50}} =$$

$$= \frac{0,05}{(1,05)^5-1} \left(\frac{0,09(1,05)^{26,0758}-1}{0,05}\right)^{\frac{5}{26,0758}} = 0,242737,$$

foit 24 $\frac{26}{95}$ p. $\frac{0}{0}$; il gagneroit de 5 en 5 ans, & autant de fois que les rentiers lui repréteroient l'accumulation, ce qui leur reviendroit de 24 $\frac{26}{95}$ p. $\frac{0}{0}$ de rente annuelle, au bout de 1 m. 21 $\frac{23}{27}$ j, ainfi de fuite; tellement que s'il les rembourfoit au bout de chaque année par l'annuité 1,06048, qui feroit la plus grande de toutes, il ne fupporteroit plus que le 6,048 p. $\frac{0}{0}$ foit le 6 $\frac{1}{21}$ p. $\frac{0}{0}$.

LXXVIII. Mais revenant à la règle que nous avons donnée ci-deffus, N°. LXX, & qui jufqu'ici nous a paru un des moyens de tirer le meilleur parti des rentes viagères; nous remarquerons que celle de 9 pour 100 fur deux têtes de 6 ans, donneroit au bout de 90 ans de jouiffance, c'eft-à-dire, après la mort du dernier rentier, une fomme d'accumulation, exprimée par $(1,055708)^{90}$. (Voyez la table N°. L). Le *maximum* du profit d'intérêt eft 0,06045 au bout de 36 ans de jouiffance; Moyen précis.

poſons 6,048 p. $\frac{0}{0}$., celui-ci devroit être ſoutenu pendant 49, 13 17 ans, pour qu'on eût $(1{,}06048)^{49{,}1317}(1{,}05)^{40{,}8685} = (1{,}055708)^{90}$.

Si donc, l'on ne vouloit faire par des annuités qu'un ſeul rembourſement qui durât $49^{\text{ans}}\ 1^{\text{m.}}\ 18^{\text{jours}}$; ces annuités devroient être $=8{,}95983$ p. $\frac{0}{0}$.; mais il faudroit que l'emprunteur pût ſupporter ſans perte le 8,86 p. $\frac{0}{0}$; & s'il ne pouvoit ſupporter que le 6 $\frac{1}{4}$ environ, il faudroit qu'il rembourſât la rente viagère par des annuités de 17,9732 p. 100, payées pendant 7 ans 7 j; qu'à cette époque les rentiers lui reprêtaſſent l'accumulation pour être rembourſée comme la rente viagère; ainſi de ſuite, d'époque en époque de 7 ans 7 jours; les rentiers trouveroient au bout de chacune de ces époques leur argent placé au 6,048 pour $\frac{0}{0}$; & l'emprunteur ne ſupporteroit que le 6 $\frac{1}{4}$.

Emprunts ſucceſſifs.

LXXIX. Enfin, pour obtenir les mêmes avantages, on pourroit faire des emprunts ſucceſſifs, non pas de nouveaux capitaux, mais des rentes échues, comme nous l'avons fait au N°. LXXI, ce qui nous paroît très-praticable; mais pour ne pas nous répéter trop ſouvent, nous chercherons quels ſeroient les réſultats d'une autre ſuite de replacemens, expoſée d'une manière générale dans le problême ſuivant.

PROBLÈME.

Suppoſant une continuité de n emprunts faits au commencement de chaque année, & rembourſables chacun par un nombre t d'annuités au a pour 1; ſupposant, de plus, que les prêteurs au premier emprunt replacent chaque fois au 2e. 3e. 4e., &c. toutes les annuités provenantes du 1er., 2e., 3e., &c.; & qu'après n ans, il n'y ait plus d'emprunts; mais que les prêteurs placent toutes les annuités qu'ils recevront au i pour 1 d'intérêt sur intérêt; quelle somme s, & quel profit d'intérêt y pour 1 auront-ils au bout de $(t+n-1)$ ans; temps au bout duquel l'emprunteur aura rempli son dernier engagement?

Pour fixer l'attention, on pourra s'aider de la figure ci-dessous; dans laquelle les lettres e, e, e, &c. désignent les emprunts successifs remboursables chacun par autant d'annuités qu'on mettra de points perpendiculaires sur chacune de ces lettres.

Il sera aisé de reconnoître que si le capital est $= 1$

l'annuité du premier emprunt sera $= a$

du 2d. $= a \times a$ - - - - - - - $= a^2$

du 3e. $= (a+a^2)a$ - - - $= a^2(1+a)$

du 4e. $= [a+a^2+a^2(1+a)]a = a^2(1+a)^2$

du $t^{\text{eme}} =$ - - - - - - - - - - $= a^2(1+a)^{t-2}$

$(t+1) =$ - - - - - - - - - $= a^2(1+a)^{t-1}$

& en général, si $t=n$, ou est $>$ que n, l'annuité

du n^{eme} emprunt sera - - - - - - - $= a^2(1+a)^{n-2}$

Mais si t est $<$ que n, alors l'annuité . . . . .

du $t+1$ emprunt - - - - - - - - - - $= a^2(1+a)^{t-1}$

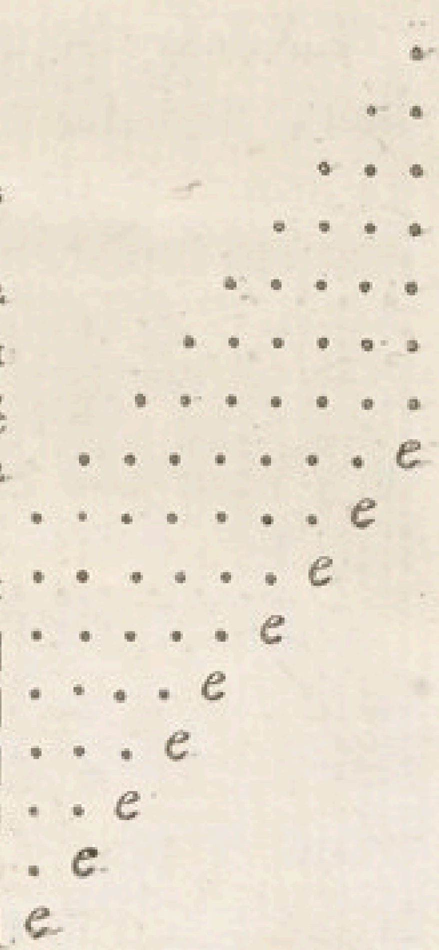
du $t+2$ - - - - - - - - - - - - - $= a^2[(1+a)^t - 1]$

du $t+3$ - - - - - - - - - - $= a^2[(1+a)^{\underline{t+1}}(1+2a)]$

du $t+4$ - - - - - - - $= a^2[(1+a)^{\underline{t+2}}(1+a)(1+3a)]$

du $t+5$ - - - - - $= a^2[(1+a)^{\underline{t+3}}(1+a)^2(1+4a)]$

du $t+3+v$ $= a^2[(1+a)^{\underline{t+v+1}}(1+a)^v(1+(v+2)a)]$



Pour abréger, nous ſuppoſerons ſeulement deux cas; celui où le nombre t des annuités eſt plus grand, & celui où il eſt au moins égal à celui n des emprunts.

On recevroit à la fin de la $(t+n-1)^{eme}$ année

$$a(1+q+q^2+\cdots+q^{t-n})q^{n-1} = \frac{a}{i}(q^t-q^{n-1})$$

$$a^2(1+q+q^2+\cdots+q^{t-n+1})q^{n-2} = \frac{a^2}{i}(q^t-q^{n-2})$$

$$a^2(1+a)(1+q+q^2+\cdots+q^{t-n+2})q^{n-3} = \frac{a^2(1+a)}{i}(q^t-q^{n-3})$$

. . . .

$$a^2(1+a)^{n-2}(1+q+q^2+\cdots+q^{t-1})q^0 = \frac{a^2(1+a)^{n-2}}{i}(q^t-q^{n-n})$$

Donc $s=\frac{a}{i(a-i)}[(1+a)^{n-1}((a-i)q^t-a)+iq^{n-1}]=(1+y)^{t+n-1}$

& $y = s^{\frac{1}{t+n-1}}-1$.

LXXX. Suppoſons donc maintenant & en premier lieu, une ſuite d'emprunts rembourſables chacun par 34 annuités de 9 pour 100; dans chacun deſquels les rentiers replacent pendant quelques années de ſuite, leurs rentes; & ſuppoſons que lorſqu'il n'y aura plus de nouveaux emprunts, ces mêmes rentiers accumulent au 5 pour 100 tous les différens payemens annuels qu'on leur fera.

On ſubſtituera dans la formule ci-deſſus 0,09 à la place de a; 0,05 au lieu de i, ou 1,05 au lieu de q; on fera $t=34$; & n ſucceſſivement 1, 2, 3, &c., & l'on trouvera pour s, & pour y les valeurs qu'on voit dans la table ſuivante.

Table

Table.

Nombre n d'emprunts successifs, remboursables chacun par 34 annuités de 9 p. 100.	Temps $t+n-1$, au bout duquel les annuités seroient toutes payées.	Montant f de l'accumulation des rentes & de leurs intérêts au 5 pour 100.	Intérêt y auquel il auroit fallu faire fructifier le capital 100 liv. pour avoir eu la même somme que ci-contre.	Intérêt j que l'emprunteur supporte dans ces emprunts successifs.
1. . . .	34. . . .	765 liv. 12 s. 1 d.	6,1696 pour 100. .	
2. . . .	35. . . .	825 10 2	6,2165.	
3. . . .	36. . . .	890 7	6,2617.	
4. . . .	37. . . .	960 11 7	6,3053.	
5. . . .	38. . . .	1036 12 3	6,3476.	toujours
6. . . .	39. . . .	1118 19 4	6,3880.	8,42445, soit
7. . . .	40. . . .	1208 3 4	6,4273.	
8. . . .	41. . . .	1304 16 9	6,4654.	$8\frac{4\frac{11}{45}}{10}$ p. %
9. . . .	42. . . .	1409 12 3	6,5024.	
10. . . .	43. . . .	1523 3 8	6,5383.	
11. . . .	44. . . .	1646 6 1	6,5732.	
13. . . .	46. . . .	1924 12	6,6400.	
16. . . .	49. . . .	2436 17 11	6,7340.	
17. . . .	50. . . .	2637 10 2	6,7637.	
33. . . .	66. . . .	9593 16 4	7,1594.	
34. . . .	67. . . .	10414 7 6	7,1800.	
			Ainsi de suite, sans pouvoir jamais obtenir l'intérêt 8,42445. p. 100.	

Conséquence.

LXXXI. Cette table n'a point été dressée dans l'intention de diminuer de beaucoup la charge de l'emprunteur, mais pour s'assurer que, les prêteurs ne pouvant replacer la rente au même intérêt que l'emprunteur supporte, le moyen d'obtenir ce profit d'intérêt est d'avoir une succession continuée d'emprunts, & non pas une rente perpétuelle.

LXXXII. Et pour se convaincre qu'il vaudroit mieux pour les uns & pour les autres, que le nombre des payemens fût plus petit, & les emprunts plus fréquens; supposons d'un côté un emprunt unique remboursable par 50 annuités de 9 pour 100; & de l'autre une suite d'emprunts annuels; rembourſables chacun par 34 annuités auſſi de 9 p. $\frac{0}{0}$, dans leſquels (pour ſimplifier) les ſeuls prêteurs auront le droit de replacer ſeulement les rentes que le débiteur leur payera chaque année. Je dis que, ſi ce débiteur s'engage à faire ſeulement ſix emprunts de ſuite; il y aura, pour ceux qui s'intéreſſeront à cette ſuite d'emprunts, un bénéfice réel, que n'auront pas ceux qui s'intéreſſeront à l'emprunt unique de 50 annuités.

Condition des prêteurs.

LXXXIII. En effet, l'annuité 9 p. $\frac{0}{0}$. reçue & placée à 5 p. $\frac{0}{0}$ pendant 50 ans, produit pour chaque 100 liv. de capital une ſomme $=$ 1884 liv. 3 ſ. 5 den.; mais le montant des payemens des ſix emprunts qui, par la table, eſt de 1118 liv. 19 ſ. au bout de $(34+5)$ ans, étant placé encore au 5 p. $\frac{0}{0}$ pendant 11 ans, ce qui fait en tout 50 ans, deviendroit égal à 1913 liv. 15 ſ. 9 den.; or, cette ſomme étant de 29 liv. 12 ſ. 4 d. plus forte que la première 1884 liv. 3 ſ. 5 den., cela fait voir que les prêteurs intéreſſés aux ſix emprunts, auront gagné de plus que les autres, au bout de 60 ans, 29 liv. 12 ſ. 4 den. par chaque 100 liv. de capital prêté; puiſqu'ils n'auront pas donné un plus grand capital dans cette ſuppoſition que dans l'autre.

Mais s'il n'y avoit que 5 emprunts ſucceſſifs, on auroit au bout de 50 ans, 1861 liv. 11 ſ. 6 den., & les prêteurs auroient perdu au contraire 22 liv. 11 ſ. 11 d. ſur chaque 100 liv. prêtées.

Avantage pour l'emprunteur.

LXXXIV. Je paſſe à l'examen des avantages qu'y trouveroit auſſi le débiteur.

On voit d'abord qu'en faiſant tel nombre d'emprunts que ce ſoit, rembourſables par 34 annuités de 9 p. %, il n'eſt obligé de faire valoir les réſidus annuels de l'emprunt qu'au 8,42445, ſoit au $8\frac{14}{33}$ p. %; tandis que pour payer pendant 50 ans cette même annuité, il faudroit qu'il fît valoir au 8,8716, ſoit $8\frac{34}{39}$, les réſidus annuels de cet autre emprunt. Or, ces réſidus annuels des mêmes capitaux ne ſont pas égaux de part & d'autre dans les deux ſuppoſitions d'emprunts; car, dans la ſuite d'emprunts, la dette au bout de 6 ans eſt conſidérablement augmentée par l'accumulation des arrérages & de leurs intérêts compoſés, tandis que dans l'emprunt unique de 50 annuités, la dette au bout de 6 ans ſeroit au contraire diminuée par l'amortiſſement annuel qu'opéreroient les payemens des annuités. D'un autre côté, le débiteur ſeroit délivré onze ans plutôt du poids de la dette, dans la ſuppoſition des emprunts ſucceſſifs, ce qui forme une complication, qui ne laiſſe pas facilement voir ſans calcul l'avantage ou le déſavantage du débiteur dans ces ſortes de converſions. Remarquant donc que toute ſomme qui eſt entre les mains d'un emprunteur, devant être cenſée lui rapporter un certain intérêt j pour 1, il ſeroit abſurde de prétendre eſtimer les profits & pertes, en ne conſidérant que les valeurs abſolues des ſommes qui vont & viennent des caiſſes débitrices dans celles des prêteurs; & qu'il faut encore faire attention aux époques où ſe font ces tranſports d'eſpèces entre le débiteur & les rentiers; je vais, ſous ce point de vue, procéder à la comparaiſon, relativement à l'emprunteur, de ces deux formes d'emprunts qu'on lui propoſe de faire.

Estimation de sa charge dans l'emprunt unique.

LXXXV. La condition du premier genre d'emprunt est que, pour 100 l. que l'emprunteur reçoit dans ce moment, il s'engage à payer pendant 50 ans l'annuité 9, à commencer de la première année. Quelle est la valeur de cette charge au moment qu'il en contracte l'obligation ?

Une des formules des annuités m'apprend que le capital c qui représente dans ce moment la valeur des annuités à payer est $c = \frac{a(k^t - 1)}{jk^t}$, formule dans laquelle $k = 1 + j$, & $t = 50$ Si $j = 0{,}05$, cette formule devient $= 164{,}3032$; si $j = 0{,}06$; elle devient $= 141{,}8568$; si $j = 0{,}06\frac{1}{2}$ elle devient $= 122{,}1895$: ainsi, dans toutes ces suppositions plausibles qu'on pourroit faire sur l'intérêt, cette valeur est supérieure à 100 liv. que l'emprunteur reçoit; ce qui doit être; puisqu'il faudroit qu'il fît valoir à $8\frac{34}{35}$ p. $\frac{0}{0}$. dans ce premier emprunt, pour que les 100 liv. des prêteurs fussent suffisantes.

Lors donc qu'un emprunteur prend des capitaux pour les rembourser par 50 annuités de 9 p. $\frac{0}{0}$, il ne reçoit que 100 liv. pour ce qui lui coûte $164\frac{10}{33}$, ou $141\frac{6}{7}$, ou $122\frac{18}{95}$; suivant que l'intérêt auquel il fait valoir ses fonds est le 5, le 6 ou le $6\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$. Ainsi, s'il ne peut faire valoir les fonds de cet emprunt à un plus fort intérêt, sa perte peut dans un sens s'exprimer par $64\frac{10}{33}$, $41\frac{6}{7}$, ou $22\frac{18}{95}$ p. $\frac{0}{0}$. de la somme empruntée; puisqu'enfin, ces valeurs là, il doit les trouver quelque part, au moment qu'il fait l'emprunt, pour pouvoir remplir les suites de son engagement.

Dans les emprunts successifs.

LXXXVI. La condition du second genre d'emprunt est de faire de suite 6 emprunts remboursables par des annuités, de 9 p. $\frac{0}{0}$. pendant 34 ans. Que les fonds de ces six emprunts soient pour le premier, par exemple, 100 l. & pour les 5 suivants, ce que l'emprunteur pourroit devoir aux prêteurs pour les rentes de l'année qui vient de s'écouler; tellement que les payemens effectifs ne commencent qu'à la fin de la sixième année, & qu'il y ait 5 ans arriérés.

Soient A, B, C, D, E, F les capitaux des six emprunts; l'emprunteur s'engage donc à payer effectivement, & à commencer dans 6 ans.

1°. L'annuité $F \times \frac{9}{100}$ pendant 34 ans; 2°. l'annuité $E \times \frac{9}{100}$ pendant 33 ans; 3°. l'annuité $D \times \frac{9}{100}$ pendant 32 ans; 4°. l'annuité $C \times \frac{9}{100}$ pendant 31 ans; 5°. l'annuité $B \times \frac{9}{100}$ pendant 30 ans; 6°. l'annuité A pendant 29 ans.

Les valeurs A, B, C, D, E, F, ont déjà été découvertes généralement; mais pour plus de clarté cherchons à les obtenir ici en particulier d'une autre manière.

D'abord $A = 100$; $B = 100 \times \frac{9}{100} = 9$; ensuite $C = B + B \times \frac{9}{100} = 9 \times \frac{109}{100}$; $D = C + C \times \frac{9}{100} = 9\left(\frac{109}{100}\right)^2$; $E = D + D \times \frac{9}{100} = 9 \times \left(\frac{109}{100}\right)^3$; $F = E + E \times \frac{9}{100} = 9\left(\frac{109}{100}\right)^4$.

Donc les annuités à payer pendant 29, 30, 31, 32, 33 & 34 ans, sont respectivement.

$100 \times \frac{9}{100}$; $9 \times \frac{9}{100}$; $9 \times \frac{9}{100} \times \frac{109}{100}$; $9 \times \frac{9}{100} \times \left(\frac{109}{100}\right)^2$; $9 \times \frac{9}{100} \times \left(\frac{109}{100}\right)^3$; $9 \times \frac{9}{100} \times \left(\frac{109}{100}\right)^4$.

Il faut chercher leurs valeurs au commencement de du dernier emprunt, par la formule citée ci-dessus, puis additionner ces valeurs; enfin, multiplier la somme par $\frac{1}{k^5}$ suivant la règle pour l'escompte, puisque chaque payement est arriéré de 5 ans: le produit donnera exactement la valeur présente c des engagemens que l'emprunteur contracte par cette seconde supposition ; valeur qui comparée comme celle ci-dessus avec 100 liv. qu'il reçoit, donnera l'estimation de sa perte.

Faisant donc ces calculs, on trouvera 1°. que si l'emprunteur fait valoir les fonds au 8 $\frac{14}{33}$ p. $\frac{0}{0}$. pendant 39 ans, il n'aura besoin de rien ajouter au capital 100 l. 2°. que s'il fait valoir au 6 $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$., il sera obligé d'ajouter 20,7174 ou 20 $\frac{33}{46}$ au capital 100 liv.; tandis que dans l'emprunt unique de 50 annuités, il étoit obligé d'ajouter 22 $\frac{18}{95}$ au même capital, pour que, les faisant fructifier ensemble, il eût de quoi remplir son engagement.

Si l'on établit le calcul sur les intérêts 6 & 5 p. $\frac{0}{0}$, on trouvera, il est vrai, qu'il seroit obligé d'ajouter quelque chose de plus à ce capital primitif que dans la première supposition d'emprunt : car sa charge à l'intérêt 6 seroit de 142,4807 liv. $>$ que 141,8568, & sa charge à l'intérêt 5, seroit 166,8890 $>$ que 164,3032 ; mais cette différence vient uniquement de ce que le nombre 34 des annuités est un peu plus grand qu'il ne faudroit pour que les profits des prêteurs fussent parfaitement égaux dans ces deux suppositions d'emprunts ; car on peut sentir, & on verra ci-après, que dans tous les cas de l'égalité de gain pour les prêteurs, la charge de l'emprunteur sera toujours la même $=164,3032$, s'il fait valoir au même intérêt 5 p. $\frac{0}{0}$, que les prêteurs accumulent ; & que sa charge diminuera à mesure que, dans l'une & dans l'autre supposition d'emprunt, il fera valoir à un intérêt plus fort.

LXXXVII. Voici une table qui montre ce qui résulteroit, ſi au lieu d'un emprunt de 50 annuités de 9 p. $\frac{0}{0}$, & de ſix emprunts de 34 annuités, on en faiſoit 9 de 28 $\frac{41}{46}$, annuités ou 21 de 21 $\frac{27}{28}$ annuités, &c.

Table du nombre & de la durée corrélative des emprunts ſucceſſifs.

I. Nombre t d'annuités, ou temps pendant leſquels l'annuité 9 p. 100 doit être payée dans chaque rembourſement.	II. Nombre n d'emprunts ſucceſſifs	III. Durée $(t+n-1)$ des payemens.	IV. Intérêts y auxquels le prêteur ſe trouve avoir placé ſon capital au bout de la durée $t+n-1$ des payemens.	V. Sommes $ſ$ accumulées au 5 pour 100 à la fin des payemens.	VI. Montant M des mêmes ſommes $ſ$ avec les intérêts depuis le temps $t+n-1$ juſqu'à $T=50$ ans.	VII. Intérêt j auquel l'emprunteur devroit pouvoir placer pour ne rien perdre.	VIII. Charge C de l'emprunteur s'il ne peut faire valoir qu'au 6 p. 100 le capital 100 liv.
ans mois j.		ans mois j.		liv. ſ. d.	liv. ſ. d.		
50	1	50	6,048 p. 100.	1884 3 4	toujours	8,8716 p. 100.	141,8568 liv.
. . . . . .	. . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	1884 3 4	. . . . .	. . . . .
32 11 19	6	37 11 19	6,38047	1047 12 10	de même que	. . . . .	140,5880
. . . . . .	. . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	les profits	. . . . .	. . . . .
. . . . . .	. . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	d'intérêts au	. . . . .	. . . . .
30 15	8	37 15	6,4170	1001 4 8	6,048 p. 100.	. . . . .	. . . . .
28 10 21	9*	36 10 21	6,4229 *	993 18 7	. . . . .	8,03975	138,7562
27 10 22	10	36 10 22	6,42276	994 1 6	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . . .	. . . .	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
21 11 17	21	41 11 17	6,25	1273 1 3	. . . . .	6,93716	126,8718

Les nombres de la 5e. colonne ont été calculés par la formule $ſ=\frac{ac}{i(a-i)}[(1+a)^{n-1}(q^t(a-i)-a)+iq^{n-1}]=\frac{M}{q^{T-(t+n-1)}}$; M étant le montant, ou la valeur de $ſ$, au bout de la 50eme année; & T étant ici $=50$, durée du rembourſement à convertir : d'où l'on tire $M=cQ^T=ſq^{T-(t+n-1)}=$ $=\frac{acq^{T-(t+n-1)}}{i(a-i)}[(1+a)^{n-1}(q^t(a-i)-a)+iq^{n-1}]$, &

$$t=\frac{Laq^{T+1}(a(1+a)^{n-1}-iq^{n-1})-L[(aq^{T+1}(1+a)^{n-1}-\frac{M}{c}iq^{n})(a-i)]}{Lq}.$$

La charge c des engagemens que l'emprunteur contracte, & dont les valeurs ſont contenues dans la 8eme. colonne, ſe trouvera en diviſant la valeur de $ſ$ par

k^{t+n-1} (k étant $= 1+j$ & j l'intérêt auquel il fait valoir les fonds) ; puisqu'il n'auroit qu'à faire valoir le quotient à l'intéret j, pour avoir de quoi satisfaire les prêteurs. Ainsi l'on a

$$C = \frac{ac}{i(a-i)k^{t+n-1}}[(1+a)^{n-1}(q^t(a-i)-a)+iq^{n-1}] = \frac{s}{k^{t+n-1}}$$

D'où il est manifeste que si k est $>$ que q, la charge de l'emprunteur sera plus petite que la valeur présente de la somme s pour les prêteurs; ou que $\frac{s}{k^{t+n-1}}$ sera $<$ que $\frac{s}{q^{t+n-1}}$, valeur des contrats dans les mains des prêteurs qui doit être ici la même dans les deux suppositions d'emprunts; il est manifeste, par conséquent, que plus on diminuera le nombre des annuités en augmentant le nombre des emprunts, plus on diminuera la charge réelle de l'emprunteur, s'il fait valoir à un plus haut taux d'intérêt que celui auquel les prêteurs accumulent; tandis que si $k=q$, la charge feroit toujours la même pour lui, dans toutes les suppositions possibles d'emprunts.

Limite dans le nombre des emprunts.

Mais ces suppositions possibles ont une limite; car, comme il faut que le profit d'intérêt Q^{t+n-1} soit tel, que le montant des intérêts $cQ^{t+n-1} \times q^{T-(t+n-1)}$, ou que son escompte $\frac{CQ^{t+n-1}}{q^{(t+n-1)-T}}$ donne toujours pour résultat la somme M au bout du temps T; & comme les successions d'emprunts continuées à l'infini ne feroient que leur soutenir un profit d'intérêt égal à l'intérêt que l'emprunteur supporte en payant le nombre t d'annuités qui composent chaque remboursement, on doit bien sentir que ce nombre t des annuités à un dernier terme possible

ſible de diminution > que $\frac{La-L(a-ci)}{Lq}$; & qu'après ce terme, quelque répétition que l'on fît de cet emprunt, les prêteurs ne pourroient pas trouver le gain qu'ils auroient fait par les 50 annuités, & même pourroient perdre. Mais je trouve, par un raiſonnement bien ſimple, que la durée des payemens de chaque emprunt peut être telle que l'emprunteur ne ſupporte qu'un peu plus de l'intérêt auquel les prêteurs accumulent; car s'il leur ſoutenoit, par de telles ſuites d'emprunts, les profits

1,058726 juſqu'au bout de 60 ans,
1,057445 juſqu'au bout de 70 ans,
1,056538 juſqu'au bout de 80 ans,
1,055809 juſqu'au bout de 90 ans,
1,055227 juſqu'au bout de 100 ans;

on trouveroit en prenant l'eſcompte au 5 p. $\frac{0}{0}$. des ſommes que donneroient de tels intérêts, que la valeur de ces ſommes étoient à 50 ans $=(1,06048)^{50}=$ 18,8417 liv. : d'où naît une conſéquence aſſez frappante: c'eſt que l'on pourroit, par des ſucceſſions d'emprunts faits de cette manière, abaiſſer l'intérêt ſupporté par le débiteur, qui doit payer pendant long-temps de fortes annuités, preſque juſqu'au taux de l'intérêt ordinaire; & cela, en donnant aux créanciers un plus grand profit que celui qu'ils retireroient par les rentes viagères. Et quel inconvénient les capitaliſtes pourroient-ils trouver dans le nombre des prêts ſucceſſifs? Puiſqu'il ne s'agit ici que de l'argent qu'on accumule, & que *chaque année* ils ſeroient les maîtres de faire ce qu'ils jugeroient à propos. Ce ſeroit, ce me ſemble, au con-

On peut abaiſſer preſque à volonté l'intérêt ſupporté par l'emprunteur.

P

traire, le moyen de réunir de plusieurs manières la permanence des profits à leur solidité.

LXXXVIII. On pourroit encore faire usage ici de la plus petite racine de l'équation $aq^{T} - iQ^{T} - a = 0$; laquelle, pour le cas dont nous nous occupons, est $= 26{,}0758$ ans, c'est-à-dire, qu'on pourroit supposer que l'annuité est due seulement pendant 26 ans $27 \frac{8}{27}$ j. soit 26 ans; car il est certain que, si l'on soutient aux prêteurs le profit 0,06048 jusqu'au bout de 26 ans, & qu'ils reprêtent la somme ou *la valeur* de la somme accumulée; ils se trouveront avoir eu, pendant 52 ans, leur argent placé au même intérêt auquel ils ne pouvoient prétendre qu'au bout de 50 ans. Mais ici, nous avons trouvé que l'intérêt supporté par l'emprunteur est déjà baissé du $8 \frac{34}{39}$ au $7 \frac{7}{10}$ p. %; ainsi, il n'y auroit pas besoin de beaucoup d'emprunts successifs pour le baisser davantage.

Si l'on fait cinq emprunts successifs, dont chacun soit remboursable par 23,102, soit $23 \frac{5}{49}$ annuités de 9 p. %, ou dont chaque remboursement dure pendant 23 ans 1 m. 7 j.; les prêteurs auront pour montant de l'accumulation, au bout de 27 ans 1 mois 7 jours, $100 \times (1{,}060069)^{27{,}102} = 486{,}119$; somme dont la valeur, au bout de 26 ans 27 j. est $= 100 \times 1{,}06048^{26{,}0758} = 462{,}379$; & l'emprunteur, au lieu de supporter le $8 \frac{34}{39}$, ne supporteroit que le $7 \frac{6}{35}$.

Si l'on faisoit dix emprunts, remboursables chacun par 21,053, soit $21 \frac{5}{94}$ annuités de 9 p. %, ou pendant 21 ans 19 jours; les prêteurs auroient au bout de 30 ans 19 jours la somme $(1{,}059187)^{30{,}053} \times 100 = 561$ liv.

7 f. $11\frac{3}{4}$ d. pour 100 liv. de capital; somme, dont la valeur au bout de 26 a. 27 j. étoit $=100\times(1{,}06048)^{26{,}055}$ $=462$ liv. 7 f. 7 d. ; & l'emprunteur ne supporteroit plus que le $6\frac{42}{61}$ p. $\frac{0}{0}$.

Si l'on faisoit 15 emprunts, remboursables chacun par 19,8325, soit $19\frac{5}{6}$ annuités de 9 p. $\frac{0}{0}$., ou pendant 19 ans 10 mois; les prêteurs auroient au bout de 33 ans 10 m. le montant $100\times(1{,}058068)^{33{,}8325}=675$ liv. 1 f. $7\frac{37}{41}$ d.; dont la valeur à 26 ans 27 j. est $=100\times(1{,}06048)^{26{,}0758}=462$ l. 7 f. 7 d., & l'emprunteur ne supporteroit plus que le $6\frac{26}{79}$ p. $\frac{0}{0}$. ; ainsi de suite.

LXXXIX. Mais puisque nous avons trouvé, N° LXXVIII, qu'il suffiroit de soutenir aux prêteurs le profit d'intérêt 6,048 p. $\frac{0}{0}$. seulement jusqu'à 49,1317 ans, & qu'on pourroit le faire, en leur payant pendant ce temps l'annuité 8,95983 p. 100; il est manifeste que l'on pourroit avec moins d'emprunts successifs, abaisser un peu plus que nous ne l'avons fait dans la table du N°. LXXXVII l'intérêt que l'emprunteur supporte.

XC. Et en général, il suit des essais exposés ci-dessus, que pour tirer le meilleur parti des rentes viagères, il faudroit, Récapitulation.

1°. considérer le montant de l'accumulation de cette rente, à l'intérêt ordinaire du commerce, *en partant de l'âge qu'ont les rentiers au moment de cette nouvelle spéculation.*

2°. Chercher quel seroit le *maximum* de profit d'intérêt $\varrho-1$, que pourroit donner une fois cette rente viagère, à compter toujours depuis le même âge, & au bout de quel temps t ce *maximum* aura lieu.

3°. Calculer le temps $t+x$ pendant lequel il devroit être soutenu, pour que, placé ensuite à l'intérêt ordinaire, jusqu'au moment où toutes les têtes rentées seront mortes, les rentiers eussent le même montant d'accumulation que par la rente viagère.

XCI. Cela étant fait, il ne restera plus qu'à chercher la manière de soutenir ce *maximum* d'intérêt jusqu'à ce temps $t+x$, de la manière la plus convenable selon les circonstances où l'on se trouve, ce qu'on pourroit faire, selon les essais ci-dessus.

1°. Par des prêts annuels du capital & des intérêts au taux du *maximum*. (Voyez le N°. LXIII.)

2. Ou en divisant le temps $t+x$ en plusieurs époques: car on pourroit faire jouir les prêteurs, à chacune des époques, du *maximum* d'intérêt; en leur remboursant d'abord la rente viagère par des annuités dont la durée seroit égale à une de ces portions du temps $t+x$. Les rentiers repprêteroient ensuite le montant de l'accumulation des annuités, qu'on leur rembourseroit comme la rente viagère; ainsi de suite jusqu'au temps $t+x$. (Voy. le N°. LXX.)

3°. Au lieu de répéter les emprunts de cette manière, on pourroit les faire successifs; & c'est le moyen qui paroît le plus puissant entre ceux que les annuités constantes offrent pour diminuer autant que l'on voudra l'excès de l'intérêt que l'emprunteur supporte par les rentes viagères, sur le taux ordinaire, & pour augmenter en même temps l'excès du taux d'intérêt dont jouissent les prêteurs sur le taux ordinaire. (Voyez les N^{os}. LXXI, LXXIX & suivans.)

XCII. Par cette spéculation, l'emprunteur & les prêteurs trouveroient un plus grand avantage que par les rentes viagères de 8, 9, 10 p. $\frac{0}{0}$.; & tout cela, loin d'être paradoxal, repoſe ſur le fondement le plus commun & le plus ſolide, dès que l'on admet, comme cela eſt très-naturel, que l'emprunteur peut faire valoir à un taux d'intérêt un peu au-deſſus de l'intérêt ordinaire; & dès qu'on reconnoît qu'il y a dans ces rentes viagères un *chômage* d'argent. (V. les Nos LXIV & LXV).

XCIII. On pourroit même, comme je l'ai déjà fait voir (Note 21) ſubſtituer aux rentes viagères qui exiſtent, d'autres rentes viagères moins onéreuſes à l'emprunteur: car puiſqu'il ne s'agit que de ſoutenir, pendant un certain temps, aux prêteurs le *maximum* de profit d'intérêt que donne la rente viagère; elles peuvent être payées pendant beaucoup moins de temps que n'eſt la durée totale de la vie humaine, pourvu que les rentiers reprêtent l'accumulation. Je remarquerai de plus ici que lorſque, pour payer un tant pour 100 de viager ſur une tête, l'emprunteur ſupporte le 10 p. $\frac{0}{0}$., il ne ſupporteroit plus que le 9, le 8, le 7, le 6, le 5 pour $\frac{0}{0}$., ſi la rente, au lieu d'être conſtituée ſur des têtes âgées de; elle étoit conſtituée ſur des têtes âgées de

Subſtition d'autres rentes viagères à celles établies.

10 ou 11 ans;	41,	$48\frac{1}{2}$,	$53\frac{1}{2}$,	$57\frac{1}{2}$,	$60\frac{1}{2}$ ans.
20	43,	50,	55,	$58\frac{1}{2}$,	$61\frac{1}{2}$.
30	45,	$50\frac{3}{4}$,	56,	59,	62.
40	48,	54,	58,	61,	63.
50	$55\frac{1}{2}$,	59,	62,	64,	66.
60	$62\frac{1}{2}$,	$64\frac{1}{2}$,	$66\frac{1}{2}$	68,	$69\frac{1}{2}$; &c.

On trouveroit, de même, que lorſque l'emprunteur ſupporte le 8 p. $\frac{0}{0}$., il ne ſupporteroit plus que le 7, le 6, le 5, le 4, le 3 pour 100; si la rente, au lieu d'être constituée sur des têtes

âgées	elle étoit constituée sur des têtes âgées				
de 10 ans;	de 39,	47,	52,	56,	59 ans.
. . . . . .	. . . .				
de 50 ans;	55,	59,	62,	68,	69.

Ainsi, supposons qu'il dût une rente viagère de 10 pour 100 sur l'âge de 10 ou 11 ans; dans ce cas il supporteroit au moins le 9 pour 100 d'intérêt, en suivant l'ordre de M. de Parcieux; mais il ne supporteroit que le 8 pour 100, s'il la payoit sur des têtes de $40\frac{1}{2}$ ans; le 7 sur des têtes de 48; le 6 sur des têtes de 53 ans; &c.

Le *maximum* de profit d'intérêt, ainsi que les profits d'intérêts faits au moment de la mort des derniers rentiers sont, à la vérité, un peu plus grands dans le premier de ces cas que dans tous les autres; mais la rente viagère pouvant être croissante, selon une infinité de loix, avec la durée de la vie de chaque tête rentée, il seroit facile de faire ensorte que les *maxima* des profits fussent égaux dans plusieurs de ces différens cas, & cela, en abaissant de plus en plus l'intérêt que l'emprunteur supporte. On parviendroit aussi au même but en limitant, à une certaine époque, la durée de la rente sur l'âge de dix ans, & substituant de nouvelles rentes viagères, créées à cette époque, aux annuités dont j'ai fait usage (Nos. LXX, LXXI, &c.)

Conclusion. XCIV. Voilà, ce me semble, quelques idées & quelques moyens pour faire des emprunts moins onéreux à l'emprunteur, & plus avantageux aux créanciers accumulateurs, que ne le sont des emprunts remboursables par des rentes viagères de 8, 9 & 10 pour 100, de la forme usitée; & j'ose croire que ces considérations ne sont pas à négliger dans les *emprunts à venir.* Quant à ceux déjà faits, le débiteur ne pourroit-il pas dire à ses créanciers?

J'ai contracté avec vous une dette remboursable par des rentes viagères. Vous consommez une partie de vos rentes, l'autre partie, vous l'accumulez pour reformer vos capitaux, & pour faire des profits; ne parlons que de cette seconde partie. Les plus grands profits que vous puissiez faire par les rentes viagères ne sont pas bien grands; ils consistent en quelques unités *pour mille*, de plus que l'intérêt ordinaire du commerce. Cependant vous courez toujours les hasards de mortalité, & pour vous faire jouir seulement de si modiques profits, sous la forme actuelle d'emprunt ou de remboursement, ma charge est bien supérieure à vos avantages. Or, il est une infinité de formes de remboursement, qui, non seulement diminueroient pour moi cette charge, mais qui augmenteroient encore vos profits, & délivreroient votre attente, soit entiérement, soit en partie, du risque de mortalité. Il ne s'agit point de m'endetter davantage il ne s'agit que d'un *ordre économique à établir dans les époques des payemens*, d'un arrangement qui n'éloigneroit pas le moment de votre remboursement complet, qui l'approcheroit au contraire, quoiqu'il ne tînt qu'à vous de l'éloigner ensuite pour augmenter encore vos profits. Enfin, d'un arrangement où mon avantage aussi palpable que le vôtre, ne peut qu'augmenter votre

Exposé des motifs à faire ces échanges.

confiance, & qu'ajouter la *permanence* des profits à leur solidité.

Après ces considérations générales présentées d'une façon analogue aux circonstances, cet emprunteur pourroit offrir aux prêteurs des calculs semblables à ceux qui sont exposés dans ce Mémoire, & préférant les plus convenables, eu égard à la grandeur de la rente & à l'âge des têtes, il finiroit par laisser le choix du tout à la libre détermination des intéressés.

Au reste, je sens trop combien de connoissances & combien d'expérience il seroit nécessaire de réunir à l'activité du génie pour proposer & appliquer convenablement de pareils moyens. Qu'il me suffise donc d'avoir indiqué ce petit nombre de spéculations élémentaires, auxquelles il ne paroît pas qu'on ait pensé jusqu'à présent. Mais en terminant ce Mémoire, je prie que l'on ne m'attribue pas la persuasion d'en avoir épuisé le sujet ; je connois les imperfections de ce premier essai, & j'espère qu'il me fournira de nouvelles occasions de m'instruire. Si quelque jour, soit par un redoublement d'efforts de ma part, soit par une autre main plus heureuse, je peux voir achever la recherche que j'ai commencée, mon but sera rempli, & je serai vraiment satisfait. En attendant je dirai à mes lecteurs avec Ovide :

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Caussa, sed utilitas, officiumque fuit.

TABLE

TABLE

Des Matières contenues dans le Texte.

TABLE

Des Matières contenues dans les Notes.

E R R A T A.

Page 8. en marge près de la note, *ajoutez* Fig. 2.

Page 16, *ligne* 11, *lisez* [$ap(1-e)-i$]$=0,048$.

Page 31, *ligne* 7, payé, *lisez* payée.

Page 33, en marge près de la note, *ajoutez* Fig. 4.

Page 41, *ligne* 11, *ajoutez* $m=1$

Page 49, *ligne* 13, prismes, *lisez* primes.

Page 54, *ligne* 7, exposés, *lisez* exposées.

Page 57, *ligne* 1, le calcul, *lisez* l'ordre.

Page 65, dernière colonne, *ligne* 3, annnités, *lisez* annuités.

N°. XLI, *ligne dernière*, 6e, *lisez* de.

Page 76, *ligne* 13, pourroient, *lisez* pourroit.

Page 83, *ligne* 14, sous autre, *lisez*, sous un autre.

Page 94, *ligne* 25 de la note, au lieu ces, *lisez* au lieu de ces.

Page 103, *ligne* 22, on, *lisez* ou.

Page 109, *lignes* 26 & 27, de du dernier, *lisez* de la durée du dernier.

F I N.

PROSPECTUS.

JE propose, par souscription, un COURS DE MATHEMATIQUES A L'USAGE DU COMMERCE ET DES FINANCES, lequel est divisé en trois parties ; l'une purement arithmétique & tabulaire ; la seconde, algébrique ; & la troisième, géométrique & transcendante.

Cet Ouvrage consiste en deux volumes *in*-4°. J'y passe en revue, & j'expose, avec remarques, toutes les différentes opérations du commerce, telles que les calculs d'intérêts simples & composés, d'escomptes, de règles de compagnie, de changes & arbitrages, &c. J'y résouds des problêmes de différens degrés sur différentes spéculations ou opérations de banque & de finance. Je traite ensuite des rentes à terme fixe ou annuités égales, croissantes & décroissantes ; des rentes viagères sur une & sur plusieurs têtes ; des tontines, des caisses de veuves & autres espèces de caisses d'épargne ; des réversions, soit survivances ou valeurs des rentes dont on ne peut jouir qu'après la mort d'une ou de plusieurs personnes ; de la valeur des successions, ou des rentes dont on peut faire jouir après sa mort quelqu'autres personnes ; des assurances de vies, &c.

J'ai fait mes efforts pour exposer cette théorie avec précision & avec clarté ; & cherchant plutôt à faire un ouvrage utile, qu'un ouvrage entièrement neuf, j'ai profité des travaux des Auteurs qui m'ont précédé, & mis à contribution tous leurs ouvrages écrits en différentes langues, que j'ai pu me procurer.

PROSPECTUS.

Le prix de la souscription est de 24 liv. de France, payables seulement en recevant les exemplaires. Les personnes qui seront dans l'intention de souscrire, pourront dès ce moment, envoyer (*franc de port*) leur engagement signé, à l'Auteur, (à Paris, rue Poupée, n°. 6.) qui ne procédera à l'impression de son ouvrage, que lorsqu'il aura un nombre de souscriptions suffisant pour en couvrir les fraix.

Première Table correspondante aux Nos. X, XI, XII, XXVI & XXVII.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
pendant	*Taux d'intérêt j* qu'un emprunteur supporte en payant une rente de 10 pour 100.	au bout de	*Montant* de l'accumulation d'une rente de 10 pour 100, avec ses intérêts sur intérêts au 5 pour 100.	*Intérêts y* auxquels il faudroit avoir placé le capital 100 liv. pour avoir la même somme que ci-contre, au bout du même tems.	au bout de	*Intérêts y* auxquels il faudroit avoir placé le capital 100 liv. pour avoir une somme égale à celle du montant d'une rente de 10 p. 100. accumulée avec ses *intér. simples* au 5 pour 100.	au bout de	*Intérêts y* auxquels il faudroit avoir placé le capital 100l. pour avoir une somme égale à celle du montant de la rente 10 p. 100 accumulée simplement *sans intérêts.*	au bout de	*Montant* d'un capital 100 liv. avec ses intérêts sur intérêts. au 5 p. 100.	au 6 p. 100.	au 7 p. 100.
ans m. j.		ans m. j.	liv. f. d.		ans m. j.		ans m. j.		ans.			
1 . . .	—90 p. 100.	1 . . .	10	—90 p. 100.	1 . . .	—90 p. 100.	1 . . .	—90 p. 100.	1	105,000	106,000	107,000
2 . . .	—62,9844	2 . . .	20 10	—54,723	2 . . .	—54,723	2 . . .	—55,278	2	110,250	112,360	114,490
3 . . .	—42,4417	3 . . .	31 10 6	—31,941	3 . . .	—31,959	3 . . .	—33,057	3	115,762	119,102	122,504
4 . . .	—28,7053	4 . . .	43 2	—18,974	4 . . .	—19,022	4 . . .	—20,473	4	121,551	126,248	131,079
5 . . .	—19,4041	5 . . .	55 5 2	—11,187	5 . . .	—11,270	5 . . .	—12,944	5	127,628	133,822	140,255
6 . . .	—12,8945	6 . . .	68 4	— 6,2213	6 . . .	— 6,339	6 . . .	— 8,166	6	134,009	141,852	150,073
6 6 28	—10. .	7 . . .	81 8 5	— 2,8937	7 . . .	— 3,051	7 . . .	— 4,968	7	140,710	150,363	160,578
7 10 26	— 5. .	8 . . .	95 9 10	— 0,5751	. . . . .	. .	8 . . .	— 2,751	8	147,745	159,385	171,818
9 9	— 2, .	8 3 21	100	+ 0	8 5 6	+ 0	10 . . .	+ 0 p. 100.				
9 5 24	— 1. .	9 . . .	110 5 4	0,2982	. . . . .	. .	. . .	. .	9	155,133	168,948	183,845
10 . . .	+ 0 p. 100.	10 . . .	125 15 7	2,32	10 . . .	1,84	. . .	. .	10	162,889	179,085	196,715
10 7 2	1 . .	11 . . .	142 1 4	3,2436	. . . . .	. .	11 . . .	0,8701	11	171,034	189,830	210,485
11 3 6	2 . .	12 . . .	159 3 5	3,944	12 . . .	3,607	12 . . .	1,531	12	179,586	201,220	225,219
12 24	3 . .	13 . . .	177 2 7	4,4966	. . . . .	. .	13 . . .	2,0387	13	188,565	213,293	240,984
13 9	4 . .	14 2 14	a' 200	5	14 . . .	4,5123	14 . . .	2,4325	14	a' 197,993	226,090	257,853
14 2 14	5 . .	15 . . .	215 15 9	5,261	. . . . .	. .	15 . . .	2,74	15	207,893	239,656	275,903
15 8 21	6 . .	16 . . .	236 11 6	5,529	. . . . .	. .	. . . . .	. .	16	218,287	254,035	295,216
17 9 16	7 . .	17 . . .	258 8 1	5,743	. . . . .	. .	17 . . .	3,1706	17	229,202	269,277	315,881
. . . . .	. .	18 . . .	281 6 6	5,9144	18 . . .	5,3724	. . . . .	. .	18	240,662	285,434	337,993
. . . . .	. .	19 . . .	b' 305 7 10	6,052	. . . . .	. .	. . . . .	. .	19	252,695	b' 302,560	361,652
20 . . .	7,783	20 . . .	330 13 2	6,162	20 . . .	5,558	20 . . .	3,5265	20	265,330	320,713	386,968
20 10 28	8 . .	21 . . .	357 3 10	6,2503	. . . . .	. .	. . . . .	. .	21	278,596	339,956	414,056
. . . . .	. .	22 . . .	385 1	6,3199	. . . . .	. .	. . . . .	. .	22	292,526	360,354	443,040
. . . . .	. .	23 . . .	414 6 1	6,375	. . . . .	. .	. . . . .	. .	23	307,152	381,975	474,052
. . . . .	. .	24 . . .	445 5	6,418	24 . . .	5,697	. . . . .	. .	24	322,510	404,893	507,236
. . .	. .	25 . . .	477 5 5	6,4512	25 1 4	5,7020 M	. . . . .	. .	25	338,635	429,187	542,743
26 8 19	9 . .	26 . . .	511 2 8	6,476	26 . . .	5,6988	. . . . .	. .	26	355,567	454,938	580,735
. . . . .	. .	27 . . .	546 13 10	6,494	. . . . .	. .	27 2 6	3,7473 M	27	373,346	482,234	621,386
. . . . .	. .	28 . . .	584 6	6,506	28 . . .	5,6746	. . . . .	. .	28	392,013	511,169	664,883
. . . . .	. .	29 . . .	623 4 7	6,5127	. . . . .	. .	. . . . .	. .	29	411,614	541,839	711,425
30 . . ,	9,2514	30 . . .	664 7 9	6,5157	30 . . .	5,63237	30 . . .	3,73	30	432,194	574,349	761,225
33 2 28	9,5 .	30 4 18	680 15 4	6,516 M	. . . . .	. .	. . . . .	. .	31	453,804	608,810	814,511
. . . . .	. .	31 . . .	707 12 2	6,5154	. . . . .	. .	. . . . .	. .	32	476,494	645,339	871,527
. . . . .	. .	35 . . .	903 4 1	6,4898	. . . . .	. .	. . . . .	. .	35	551,661	768,609	1067,683
. . . . .	. .	40 . . .	1207 19 11	6,427	40 . . .	5,303	40 . . .	3,5265	40	703,999	1028,572	1497,446
48 9 12	9,9 .	45 . . .	1597	6,352	. . . . .	. .	. . . . .	. .	45	898,501	1376,461	2100,245
. . . . .	. .	50 . . .	2093 9 7	6,27163	50 . . .	4,936	50 . . .	3,2713	50	1146,740	1842,015	2945,703
. . . . .	. .	60 . . .	3535 16 9	6,1227	60 . . .	4,597	60 . . .	3,0319	60	1867,918	3298,769	5794,643
72 6 16	9,99	70 . . .	c' 5885 5 9	5,9943	70 . . .	4,302	70 . . .	2,8188	70	3042,642	c' 5907,593	11398,937
. . . . .	. .	80 . . .	9712 5 9	5,8867	80 . . .	4,041	80 . . .	2,6334	80	4956,144	10579,599	22423,436
96 7 22	9,999	90 . . .	15946 1 6	5,7971	90 . . .	3,813	90 . . .	2,4712	90	8073,036	18946,451	44110,291
		100 . . .	26100 5	5,7222	100 . . .	3,612	100 . . .	2,3293	100	13150,126	33930,208	86771,620
∞	10 p. 100.	∞	∞	5 pour 100.	∞	0 p. 100.	∞	0 p' 100.				

Mes Lecteurs pourront comparer ces sommes avec celles de la colonne IV.

SECONDE TABLE CORRESPONDANTE A LA TABLE QUI PRECEDE ET A LA FIGURE 3. (*Voyez la Note 7*).

I & II.

EQUATION DE LA COURBE *ckh.*

$$k^{t+1} - (1+a)k^t + a = 0\ ;\ t = \frac{La - L(a-j)}{Lk}$$

k étant $= 1 + j$

Sou-tangente s

$$\frac{j[k - t(a-j)]}{(a-j)kLk} \text{ ou } \frac{j[kLk - (a-j)(La - L(a-j))]}{(a-j)k(Lk)^2}$$

Sou-normale

$$\frac{j(a-j)kLk}{k - t(a-j)} \text{ ou } \frac{j(a-j)k(Lk)^2}{kLk - (a-j)[La - L(a-j)]}$$

$t = 0$ . . $j = -1$ . . . . $s = -\infty$

$t = 1$ . . $j = a - 1$ . . . . $s = \frac{(a-1)^2}{aLa}$

$t = 2$ . . $j = \frac{a - 2 \pm \sqrt{(4a + aa)}}{2}$

$t = 3$ . . $j = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{2}[(27 + 9a + 2a^2) + 9\sqrt{(9 + 4\frac{2}{3}a + a^2)}]} +$
$+ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{2}[(27 + 9a + 2a^2) - 9\sqrt{(9 + 4\frac{2}{3}a + a^2)}]} - \frac{(3-a)}{3}$

$t = \frac{La - L(a+i)}{L(1-i)}$, $j = -i$

$t = \frac{1}{a}$ . . $j = \mp 0$ . . . . $s = \mp 0$

$t = \frac{La - L(a-i)}{L(1+i)}$, $j = +i$

$t = \infty$ . . . $j = +a$ . . . . $s = +\infty$

Voyez les Numéros 6 & 11.

III, IV & V.

EQUATION DE LA COURBE *clo.*

$$y = -1 + \sqrt[t]{\left(\frac{a(q^t - 1)}{i}\right)}$$

Sou-tangente ſ

$$\frac{ity(1+y)^{t-1}}{aq^tLq - i(1+y)^tL(1+y)}$$

Sou-normale

$$\frac{y[aq^tLq - i(1+y)^tL(1+y)]}{it(1+y)^{t-1}}$$

Si $t = 0$ . . . $y = -1$; $ſ = -\infty$

$t = 1$ . . . $y = a - 1$; $ſ = \frac{-i(1-a)}{a(qLq - iLa)}$

$t = 2$ . . . $y = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{a(q^2-1)}{i}\right)}$

$t = 3$ . . . $y = -1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a(q^3-1)}{i}\right)}$

$t = 4$ . . . $y = -1 \pm \sqrt[4]{\left(\frac{a(q^4-1)}{i}\right)}$

$t = \frac{L(a+i) - La}{L(1+i)}$ . . $y = \mp 0$; $ſ = \mp 0$

$t = \frac{La - L(a-i)}{L(1+i)}$ . . $y = +i$

Si $iq^{\frac{iq^t}{q^t - 1}} = a(q^t - 1)$, $y = maximum$, $ſ = \pm\infty$

$t = \infty$ . . . $y = +i$ $ſ = -\infty$

Voyez les Numéros 13 & 15.

VI & VII.

EQUATION DE LA COURBE *csm.*

$$y' = -1 + \sqrt[t]{\left(\frac{at[i(t-1)+2]}{2}\right)}$$

Sou-tangente ſ'

$$\frac{2y't(1+y')^{t-1}}{a[i(2t-1)+2] - 2[1+y']^tL(1+y')]}$$

Sou-normale.

$$\frac{y'[a(i(2t-1)+2) - 2(1+y')^tL(1+y')]}{2t(1+y')^{t-1}}$$

Si $t = 0$ . . . . . . $y' = -1$; $ſ' = -\infty$

$t = 1$ . . . . . . $y' = a - 1$; $ſ' = \frac{-2(1+a)}{a(q+1) - 2qLq}$

$t = 2$ . . . . . . $y' = -1 \pm \sqrt{a(q+1)}$

$t = 3$ . . . . . . $y' = -1 + \sqrt[3]{3aq}$

$t = 4$ . . . . . . $y' = -1 \pm \sqrt[4]{2a(2q+i)}$

$t = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{[(2-i)^2 + \frac{8i}{a}]}}{2i}$, $y' = \mp 0$ $ſ' = \mp 0$

Si $[at(i(t-1)+2)]^{\frac{i(t-1)+2}{i(2t-1)+2}} = e$, $y' = maximum$, $ſ' = \pm\infty$
$e = 2{,}7182818$

$t = \infty$ . . . . . . $y' = 0$ $ſ' = -\infty$

Voyez le Numéro 27.

VIII & IX.

EQUATION DE LA COURBE *cin*

$$y'' = -1 + \sqrt[t]{at}$$

Sou-tangente ſ''

$$\frac{y''tt}{(1+y)(1 - La - Lt)}$$

Sou-normale

$$\frac{y''[(1+y'')(1 - La - Lt)]}{tt}$$

Si $t = 0$, $y'' = -1$; $ſ'' = -\infty$

$t = 1$, $y'' = a - 1$; $ſ'' = \frac{-(1-a)}{a(1 - La)}$

$t = 2$, $y'' = -1 \pm \sqrt{2a}$

$t = 3$, $y' = -1 + \sqrt[3]{3a}$

$t = 4$, $y'' = -1 \pm \sqrt[4]{4a}$

$t = \frac{1}{a}$, $y'' = \mp 0$ $ſ'' = \mp 0$

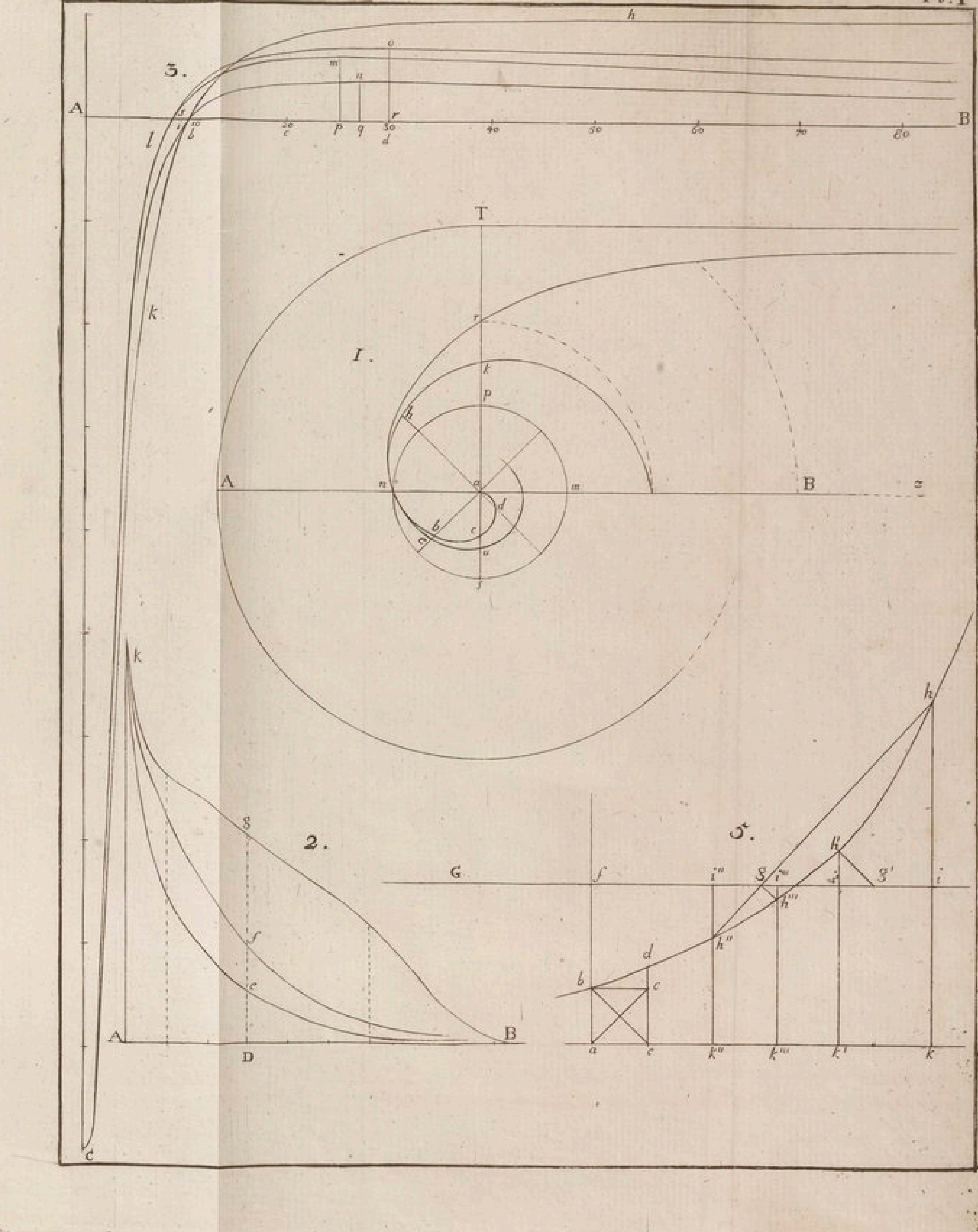
Si $t = \frac{e}{a}$, $y'' = -1 + (e)^{\frac{a}{e}}$, $maximum$
$ſ'' = \pm\infty$

$t = \infty$, $y'' = 0$ $ſ'' = -\infty$

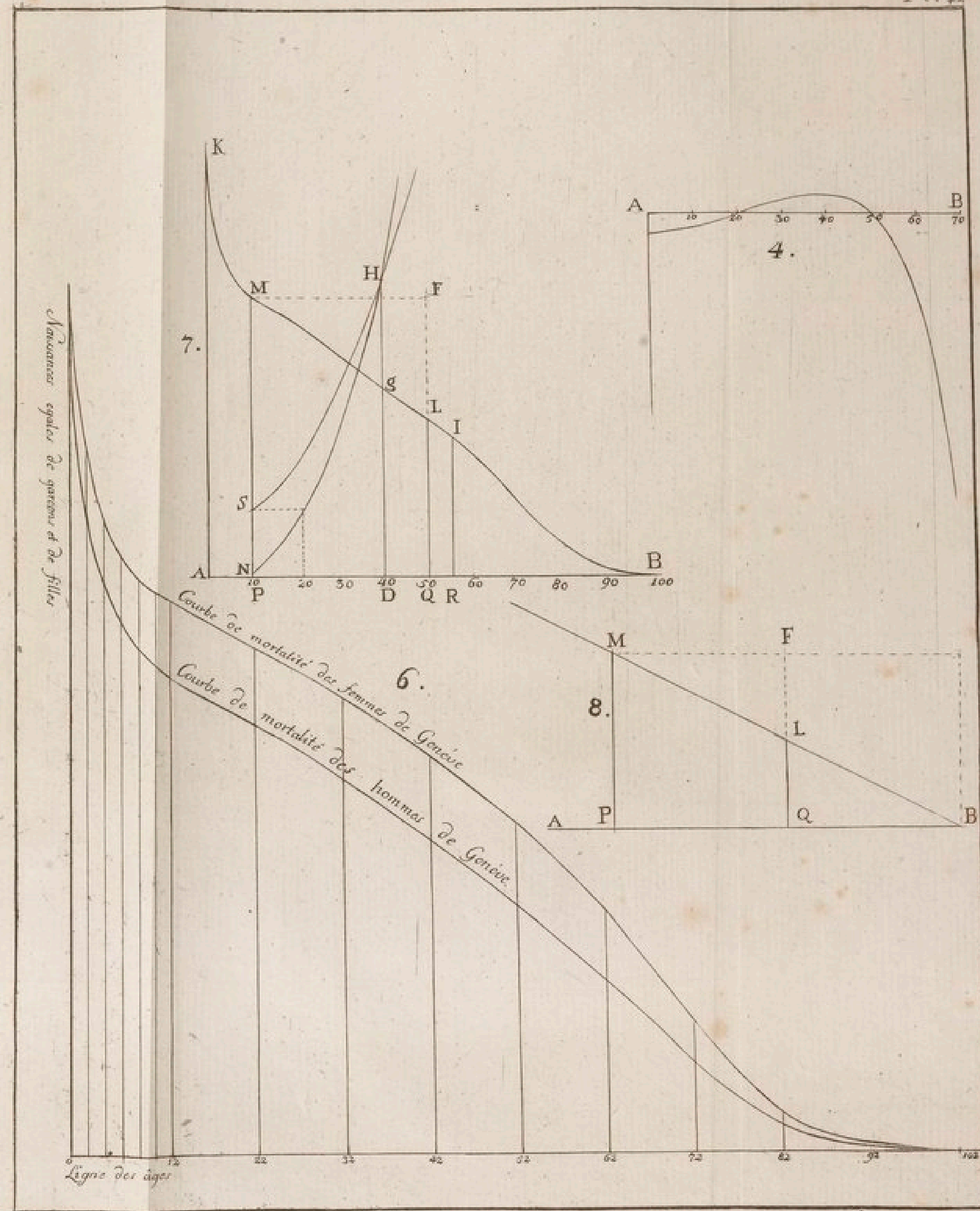
Voyez le Numéro 26.

CE tableau préſente les rélations des coordonnées dans les cas particuliers les plus remarquables ; celles qui ne peuvent pas ſe tirer immédiatement des équations aux courbes, ont été obtenues en faiſant les valeurs des ſou-tangentes ou ſou-normales égales à zéro ou à l'infini. Je dois rappeller à mes Lecteurs, que les logarithmes ſont ici hyperboliques, & je laiſſe à ceux d'entr'eux qui ſont géomètres, à faire les différentes remarques qui ſe préſentent & qu'il ſeroit trop long de détailler.

Pl. I



Pl. II


4.
6.
7.
8.
Naissances égales de garçons et de filles
Courbe de mortalité des femmes de Genève
Courbe de mortalité des hommes de Genève
Ligne des âges

RECH
SUR
LES
RENT