RICHARD PRICE

E AS

QUATRO MODALIDADES

DE

PAGAMENTOS

Importante : **Os estudos do Sr. Richard Price não têm quaisquer relações com as MODALIDADES UM e QUATRO sendo esta, o Sistema Francês de Amortização**

[*] Pedro Schubert

Rio, 08 de maio de 2020

[*] Administrador, Autor, Professor FGV-Rio, Perito Judicial TJ-RJ e Varas Federais, Contador. Membro da Comissão Especial de Perícia Judicial, Extrajudicial e Administração Judicial – CEPAJ – do Conselho Federal de Administração – CFA.

I- PARTE HISTÓRICA

O Sr. Richard Price, nos seus DOIS TRABALHOS realizados em sua SEGURADORA que originou o seu livro Observations on Reversionary Payments, com a 1ª edição em 1771:

- Dívida da Coroa Inglesa
- Pagamentos de Aposentadorias a IDOSOS e VIÚVAS

são catalogados, na matemática financeira, no capítulo do ESTUDO DE RENDAS CERTAS, em MONTANTES de 1 e de n Termos.

Para o estudo da Dívida da Coroa Inglesa utilizou a Tábua I - $(1 + i)^{n}$ – JURO COMPOSTO – e, para o Sinking Fund, utilizou a Tábua II - $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ – JURO COMPOSTO.

Estas duas Tábuas fundamentam, na matemática financeira, o estudo de MONTANTES

$$S_{\overline{n}|} = FV = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^{2} + (1+i) + 1$$

e utilizadas pelo mercado financeiro, mundial e secularmente, **nas operações de Investimentos**.

Esta Tábua II, como já vimos, é oriunda da Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica e, no nosso entendimento, É SÓ UMA FACILITADORA DE CÁLCULOS no estudo de RENDAS CERTAS onde, para calcular Montantes de t (Termos) de aplicações iguais – $(1 + i)^{n}$ – por determinado tempo – n – aplica-se t vezes o mesmo valor e, utilizando a Tábua I, fica trabalhoso.

$$\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{t} \quad \text{que, como já vimos} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \quad \text{– Tábua II}$$

- **Para o estudo do PECÚLIO utilizou a Tábua I – $(1 + i)^{n}$** – e, por isso FV = PV. $(1+i)^{n}$

  Valor, no futuro, do Pecúlio

  Valor aplicado hoje

Obs.: É uma operação que deposita hoje – PV –, para resgatar no futuro – FV – em função de n e i. É JURO COMPOSTO.

- **Para o estudo de RENDAS CERTAS**, para a formação de Reservas Técnicas, **utilizou a Tábua II** – $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ – e, na aposentadoria e/ou na viuvez, para o pagamento anual – ANNUITY – a Idosos e Viúvas – hoje os Fundos de Pensão, utilizou, na época, um artifício matemático chamado FATOR, utilizando a Tábua II que, atualmente este FATOR, é a Tábua VI – $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ – para pagamentos de benefícios – ANNUITIES.

Matematicamente fica assim :

Na formação de Reservas Técnicas ; No Pagamento da ANNUITY :

$$FV = pmt \,.\, \frac{(1+i)^n-1}{i} \text{ – Tábua II} \quad \therefore \quad pmt = FV \,.\, \frac{i}{(1+i)^n-1} \text{ – Tábua VI}$$

Contribuições do Participante

Valor do benefício para o Aposentado e/ou a Viúva

Como adendo : i - é a taxa de juro atuarial – nunca superior à 5,00% a.a. – Taxa Efetiva

n - tempo de contribuição e tempo de recebimentos de benefícios ; este dois n são fundamentados em Tábuas de Mortalidades, de Doenças e segue ; é o assunto dos ATUÁRIOS nos Fundos de Pensão.

II- **Aqui no Brasil, Autores, Professores,** Economistas, Defensores de Teses e Outros e, por causa disto, 86,36% dos Peritos Judiciais da Região Sudeste afirmam que estas TRÊS TÁBUAS denominam de TABELA PRICE (NADA HÁ A OPOR) e que a **Tábua VI calcula o valor da prestação**, que é exclusivo da MODALIDADE QUATRO, onde temos o Sistema Francês de Amortização e o Método Hamburguês, o conhecido SAC e que, por isso, concluem que no valor da prestação do Sistema Francês de Amortização TEM JURO COMPOSTO E ANATOCISMO. ISTO NÃO EXISTE. Este é o imbróglio.

Assim, em relação à QUARTA MODALIDADE DE PAGAMENTOS, estas TRÊS TÁBUAS – Tábua I - $(1 + i)^n$, Tábua II - $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e Tábua VI - $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ NÃO TÊM QUAISQUER RELAÇÕES.

Colocado, historicamente o Sr. Richard Price com os seus estudos em RENDAS CERTAS e sem nenhuma relação com o pagamento de empréstimos em parcelas, analisaremos, a seguir, a QUARTA MODALIDADE DE PAGAMENTOS :

III- ANÁLISES DAS QUATRO MODALIDADES DE PAGAMENTOS

São os fundamentos da matemática que estuda-se na matemática financeira, nos Capítulos de : JURO COMPOSTO e DESCONTO COMPOSTO as QUATRO MODALIDADES de Pagamentos (Amortizações) de Empréstimos e Financiamentos.

1- Fica posto que já são conhecidos TRÊS FATOS fundamentados nas regras da matemática :

1- Que o DESCONTO SIMPLES ou Bancário (o seu CUSTO FINANCEIRO) É MAIS ONEROSO (paga-se mais juros) do que o DESCONTO COMPOSTO.

2- Que o cálculo do Valor do Juro, no DESCONTO COMPOSTO, tem origem no Juro Composto onde : $C = A \cdot (1 + i)^n$ que também pode ser expresso : $A = C \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$.

Fator de Capitalização – Tábua I

Valor Atual

Tábua IV – Fator de Desconto

Montante

Sabemos que o Desconto Composto é : $D = C - A$

Substituindo A por $C \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ temos : $D = C - C \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$

que, processado, temos a fórmula do cálculo do valor do juro no DESCONTO COMPOSTO : $D = C \cdot i \cdot f \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \right)$ – Tábua V

3- Teoria de Reinvestimentos

Nas QUATRO MODALIDADES DE PAGAMENTOS, ao reaplicar os valores dos juros recebidos durante a vigência do contrato, bem como das prestações recebidas, o BANCO, nas Quatro Modalidades, TEM SEMPRE A MESMA RECEITA FINANCEIRA.

2- **Como já é conhecido, usaremos o modelo encontrado no Manual do Proprietário da HP12-C – O Gráfico do Fluxo de Caixa** e tomaremos o simbolismo da HP 12-C nas Modalidades UM e TRÊS :

FV - valor do empréstimo tomado no tempo n - Modalidade UM

PV - valor do empréstimo tomado no tempo 0 (zero) - Modalidade TRÊS

Na Modalidade Quatro :

PV - valor do empréstimo, HOJE

pmt - valor da prestação

Modalidade UM – 1 Termo – Desconto Composto – $\dfrac{1}{(1+i)^n}$ – Tábua IV

Pode-se tomar empréstimos em qualquer tempo t, que as fórmulas são as mesmas

Saldo Devedor – PV – 100.000,00

UN : R$ 1,00

0 1 2 3 // n

Quero um empréstimo para pagar R$ 1.000,00 a 10,00% no tempo 3 – FV. Qual o valor a ser emprestado no tempo = 0 = PV

Fórmulas Utilizadas

Valor Líquido Recebido

Temos $FV = PV \cdot (1+i)^n \quad \therefore \quad PV = FV \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n}$

$$PV = 1.000{,}00 \cdot \left(\frac{1}{1{,}331} = 0{,}7513148 \right] \qquad = \mathbf{751{,}32}$$

Cálculo do Valor do Juro :

$$D = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}$$

$$D = 1.000{,}00 \cdot 0{,}10 \cdot \left(\frac{(1{,}10)^3 - 1}{0{,}10\,(1{,}10)^3} = 2{,}486852 \right] \qquad = \underline{\mathbf{248{,}68}} \quad (1)$$

R$ 1.000,00

Aplicando a Teoria de Reinvestimentos

$248{,}685 \cdot [\,(1{,}10)^3 - 1\,]$ = **<u>82,315</u>** (2)

Total da Receita Financeira (1 + 2) **= 331,00**

Modalidade TRÊS – 1 Termo – Juro Composto – $(1+i)^n$ – Tábua I

Pode-se tomar n empréstimos no Tempo 0 para pagar em quaisquer tempos n que as fórmulas são as mesmas

UN : R$ 1,00

0 1 2 3 // n

Tomo o empréstimo de R$ 751,315 no tempo 0. Quanto pagarei no tempo 3.

Empréstimo Tomado **= 751,315**

Fórmulas Utilizadas

Temos $FV = PV \cdot (1+i)^n$

$$FV = 751{,}315 \cdot (1{,}10)^3 = 1.000{,}00$$

Cálculo do Valor do Juro :

$$J = PV \cdot \left((1+i)^n - 1 \right)$$

$$J = 751{,}3148 \cdot \left((1{,}10)^3 - 1 = 0{,}331 \right] \qquad = \underline{\mathbf{248{,}685}} \quad (1)$$

R$ 1.000,00

Aplicando a Teoria de Reinvestimentos

$248{,}685 \cdot [\,(1{,}10)^3 - 1\,]$ = **<u>82,315</u>** (2)

Total da **Receita Financeira (1 + 2)** **= 331,00**

Obs.: A Fórmula do cálculo do valor do juro é Diferente

Modalidade QUATRO – n Prestações – Desconto Composto – Tábuas III e V

Tomamos o empréstimo / financiamento, em cada tempo, em n prestações

Prestação ↓ | 0 — 1 — 2 — 3 — // — n **Un : R$ 1,00**

O valor do empréstimo no tempo é de R$ 1.000,00 pagos em 3 parcelas. Aqui, temos o Sistema Francês de Amortização em parcelas iguais, mensais, etc, anuais e sucessivas.

A fórmula para o cálculo do valor da parcela é :

$$\underbrace{pmt}_{\text{Valor da prestação}} = \underbrace{PV}_{\text{Valor do empréstimo}} \cdot \underbrace{\frac{n\,.\,(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}}_{\textbf{Tábua III}}$$

Substituindo, temos :

$$pmt = 1.000{,}00 \cdot \left[\frac{0{,}10\,(1{,}10)^{3}}{(1{,}10)^{3}-1} = 0{,}4021148 \right] = \mathbf{402{,}1148}$$

Este valor – pmt – da prestação é pago em cada tempo 3, 2 e 1.

Para calcular os valores de PV e de D de cada prestação em cada tempo, aplica-se as mesmas fórmulas :

$$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^{n}} \qquad \text{sendo } n = 3,\ 2 \text{ e } 1$$

$$D = \underbrace{pmt}_{\text{Valor da Prestação}} \cdot i \cdot \left(\frac{(1+i)^{n}-1}{i\,(1+i)^{n}} \right) (n, i) \ - \ \textbf{Tábua V}$$

Valores contidos em cada prestação :

No tempo 1 :

PV =	302,1148	$PV = 402{,}1148 \cdot \left[\frac{1}{(1{,}10)^{3}} = 0{,}7513148 \right] = 302{,}1148$
D =	100,0000	$D = 402{,}1148 \cdot 0{,}10 \cdot \left[\frac{(1{,}10)^{3}-1}{0{,}10\,(1{,}10)^{3}} = 2{,}486859 \right] = 100{,}0000$
1ª pmt =	**402,1148**	**402,1148**

No tempo 2 :

PV =	332,3263	$PV = 402{,}1148 \cdot \left[\frac{1}{(1{,}10)^{2}} = 0{,}82644628 \right] = 332{,}3263$
D =	69,7885	$D = 402{,}1148 \cdot 0{,}10 \cdot \left[\frac{(1{,}10)^{2}-1}{0{,}10\,(1{,}10)^{2}} = 1{,}73553719 \right] = 69{,}7885$
2ª pmt =	**402,1148**	**402,1148**

No tempo 3 :

PV =	365,5589	$PV = 402{,}1148 \cdot \left[\frac{1}{(1{,}10)} = 0{,}90909090 \right] = 365{,}5589$
D =	36,5559	$D = 402{,}1148 \cdot 0{,}10 \cdot \left[\frac{(1{,}10)-1}{0{,}10\,(1{,}10)} = 0{,}909090 \right] = 36{,}5559$
3ª pmt =	**402,1148**	**402,1148**

Σ pmt =	**1.206,3444**
Σ PV =	**1.000,0000**
Σ D =	**206,3444**

Plano de Amortização

Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
-	-	-	-	1.000,00
1	402,1148	302,1148	100,0000	697,8852
2	402,1148	332,3263	69,7885	365,5589
3	402,1148	365,5589	36,5559	-
TOTAL	1.206,3444	1.000,0000	206,3444 **(1)**	-

Aplicando a Teoria de Reinvestimentos

Prestação	Valor das Prestações		Valor dos Juros Reaplicados
3	402,1148	$[(1{,}10)^{2} - 1] = 0{,}21$	84,4441
2	402,1148	$[(1{,}10)^{1} - 1] = 0{,}10$	40,2115
1	402,1148	$[(1{,}10)^{0} - 1] =$ -	-
			124,6556 **(2)**
		Total da Receita Financeira (1 + 2)	**331,00**

CONCLUSÃO : Nas Três MODALIDADES o BANCO tem as mesmas Receitas Financeiras de R$ 331,00.

Para entender o funcionamento desta MODALIDADE QUATRO é preciso acrescentar mais conhecimentos.

Nas MODALIDADES UM E TRÊS o financiado obtem os emprestimos e financiamentos individuais.

Na MODALIDADE DOIS o financiado obtem os emprestimos e financiamentos recebendo o seu valor e paga os juros nos períodos financeiros estipulados em contrato e, no vencimento do contrato paga o valor dos juros do último período financeiro e o valor tomado emprestado financiado.

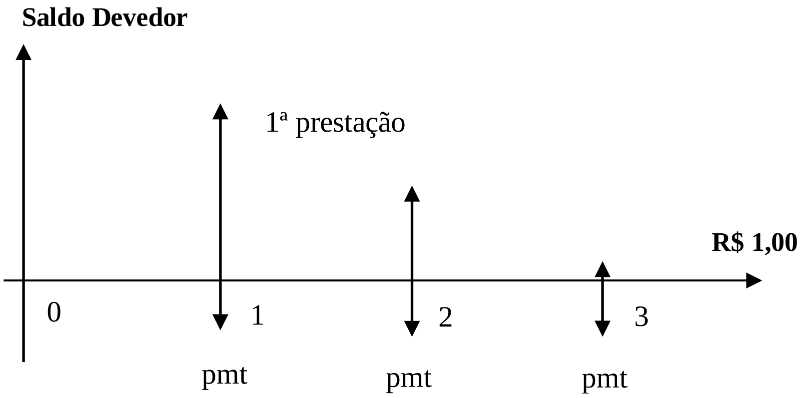
Na MODADALIDADE QUATRO o financiado obtem os empréstimos e financiamentos e recebe os seus valores que serão pagos em parcelas iguais e em cada prestação contem, de modo variável por prestação, o valor da amortização e o valor do juro.

Daí a importância fundamental da elaboração do Plano de Amortização.

Importante: O Manual do Proprietário da maquina calculadora HP 12 C introduziu o **Diagrama do Fluxo de Caixa,** que, neste site, estes gráficos estão disponibilizados na **Trilha: DIAGRAMA DO FLUXO DE CAIXA**

Para a MODALIDADE QUATRO **não tem, neste Manual do Proprietário, um Diagrama do Fluxo de Caixa que represente esta Modalidade.**

Com base no Plano de Amortização faremos este **Diagrama** como segue:



Nesta MODALIDADE QUATRO que fundamenta no Desconto Composto, a taxa de juro do período financeiro inside sobre o Saldo Devedor do início de cada período financeiro.

Assim : C . i . t

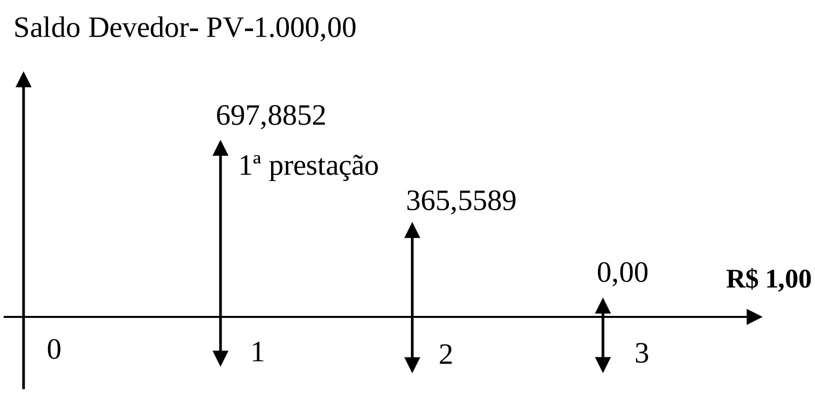
Saldo Devedor no início de cada período financeiro

1.000,00 x 0,10 x 1 = 100,0000

Plano de Amortização

Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
-	-	-	-	1.000,0000
1	402,1148	302,1148	100,0000	697,8852
2	402,1148	332,3263	69,7885	365,5589
TOTAL	1.206,3444	1.000,0000	206,3444 **(1)**	-

Diagrama do Fluxo de Caixa com base no Plano de Amortização apresentado:



IV- PARA O LEITOR

1- Fazer nas MODALIDADES UM, TRÊS e QUATRO o seguinte exercício :

- Na MODALIDADE UM, no tempo 3, tomar o empréstimo de R$ 3.993,00. Quanto receberá líquido ?
- Na MODALIDADE TRÊS toma o empréstimo de R$ 3.000,00. Quanto receberá no tempo 3 ?
- Na MODALIDADE QUATRO toma o empréstimo de R$ 3.000,00 para pagar em três prestações.

Condições : n = 3 e i = 10,00%

Quadro 1

Plano de Amortização

Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
-	-	-	-	3.000,00
1ª	1.206,3444	906,3444	300,0000	2.093,6556
2ª	1.206,3444	996,9788	209,36556	1.096,6768
3ª	1.206,3444	1.096,6767	109,66768	-
TOTAL	3.619,0332	3.000,0000	619,03324 **(1)**	-

Teoria de Reinvestimentos

Prestação	Valor das Prestações		Valor dos Juros Reaplicados
3	1.206,3444	$[(1,10)^{2} – 1] =$ 0,21	253,3323
2	1.206,3444	$[(1,10)^{1} – 1] =$ 0,10	120,6344
1	1.206,3444	$[(1,10)^{0} – 1] =$ -	-
			373,9667 **(2)**
		Total da Receita Financeira (1 + 2)	**993,00**

Calcular a Receita Financeira dos três empréstimos em cada MODALIDADE aplicando a Teoria de Reinvestimentos.

Resposta : R$ 993,00.

V- CONCLUSÃO

Nas 3 MODALIDADES as conclusões matemáticas são as mesmas. É só uma questão de planejamento financeiro. Na MODALIDADE QUATRO o pagamento é mais suave.