

**SISTEMA FRANCÊS**

**DE**

**AMORTIZAÇÃO**

**É,**

**MATEMATICAMENTE, PERFEITO E ACABADO**

**\* Pedro Schubert**

**Rio, 05 de maio de 2020**

\* Administrador, Autor, Professor FGV-Rio, Perito Judicial TJ-RJ e Varas Federais, Contador. Membro da Comissão Especial de Perícia Judicial, Extrajudicial e Administração Judicial – CEPAJ – do Conselho Federal de Administração – CFA.

- 1- Temos que eliminar do nosso folclore que o Sr. Richard Price, no século XVIII, estudou a Modalidade QUATRO de Pagamentos ( Amortizações ) de Empréstimos e Financiamentos em parcelas – o conhecido SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO. Ele NUNCA estudou esta matéria.

## 2- AMORTIZAÇÕES ( PAGAMENTOS ) DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Nas Modalidades UM, TRÊS e QUATRO ao tomar um empréstimo ou um financiamento, nas mesmas condições de  $n$  e  $i$ , ao pagar o valor do empréstimo ou da prestação, em cada tempo  $t$ , neste valor, sempre conterà o mesmo valor do principal – PV – e o mesmo valor do juro – D ou J –, nas três Modalidades.

2.1- Nas TRÊS MODALIDADES, em cada pagamento realizado, do empréstimo ou do pmt, o financiado não tem perdas e, tão pouco, ganhos em relação aos dois outros pagamentos das duas outras Modalidades por que, cada valor, internamente, tem o mesmo valor do PV e do juro.

2.2- O Sistema Francês de Amortização funciona sob o domínio do DESCONTO COMPOSTO.

2.3- Ver o item RECEITA FINANCEIRA ( adiante )

Para cada empréstimo nas MODALIDADES UM e TRÊS, no exemplo R\$ 31.547,08, sendo administrado pela MODALIDADE QUATRO, o BANCO sempre terá a mesma receita financeira, nas 3 MODALIDADES; no exemplo temos: R\$ 14.641,00.

Para o financiado as Despesas Financeiras serão :

MODALIDADE UM	-	R\$ 10.000,00
MODALIDADE TRÊS	-	R\$ 10.000,00
MODALIDADE QUATRO	-	R\$ 8.261,6507

## PREZADOS LEITORES

### DESTE SITE

### QUE DIFERENÇA EXISTE ENTRE

- Tomar 4 ou n empréstimos pela Modalidade UM – Desconto Composto
- Tomar 4 ou n empréstimos pela Modalidade TRÊS – Juro Composto
- Tomar o somatório dos empréstimos das Modalidades UM ou TRÊS, neste exemplo de R\$ 100.000,00, pela Modalidade QUATRO, em 4 ou n parcelas ? – Desconto Composto

Matematicamente não tem diferença ? Só administrativa ?

#### • Vejamos este Estudo :

Preciso de R\$ 100.000,00 e posso pagar ( amortizar ) n vezes o valor de R\$ 31.547,08, sendo  $i = 10,00\%$

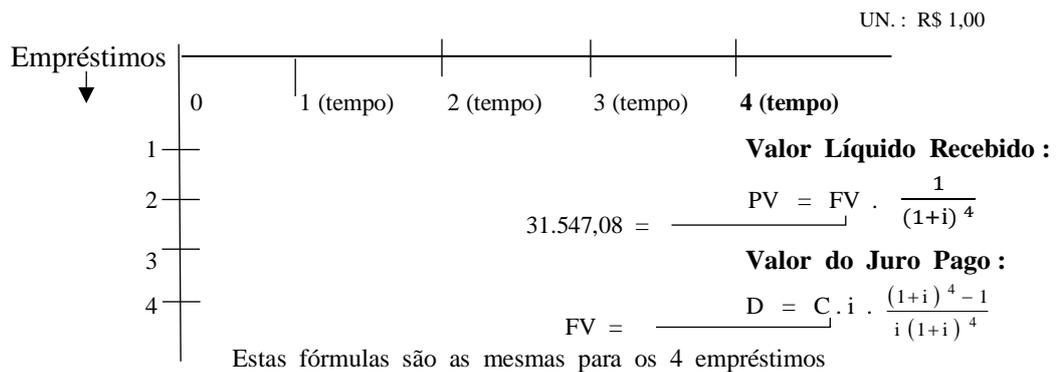
**Então, temos :  $n = ?$  ;  $i = 10,00\%$  ;  $PV = R\$ 100.000,00$  e  $pmt = R\$ 31.547,08$**

Colocando na HP12-C encontramos  $n = 4$

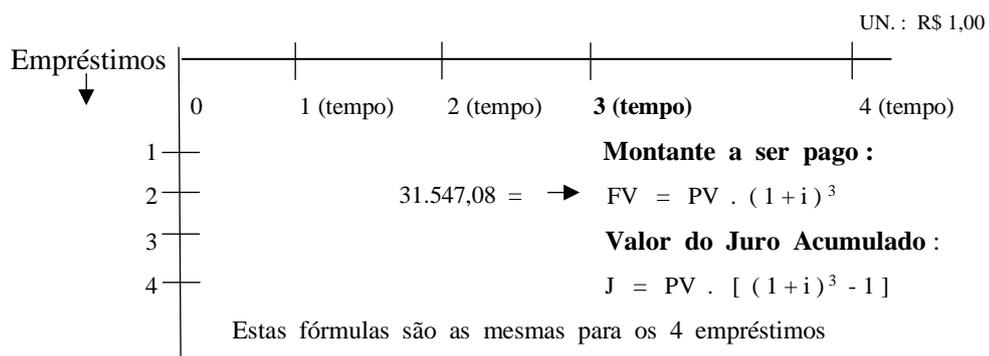
Conhecido  $n = 4$  pergunta-se : Quais são os valores dos empréstimos -PV- e do juro em cada pagamento de R\$ 31.547,08, nos tempos 1, 2, 3 e 4 de cada Modalidade UM, TRÊS e QUATRO.

### PLANO TEÓRICO

#### Modalidade UM – Valor Atual – Desconto Composto - 4 empréstimos

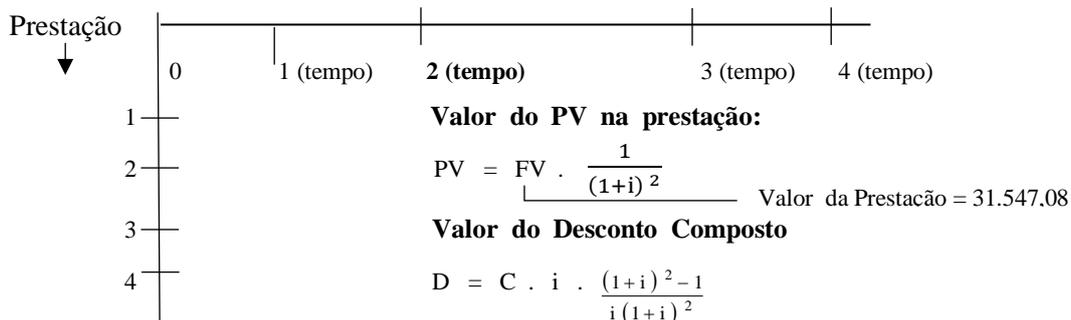


#### Modalidade TRÊS – Montante - Juro Composto – 4 empréstimos



## Modalidade QUATRO – Valor Atual ; 1 empréstimo em 4 prestações Desconto Composto

Un. : R\$ 1,00



Estas fórmulas são as mesmas para as 4 prestações

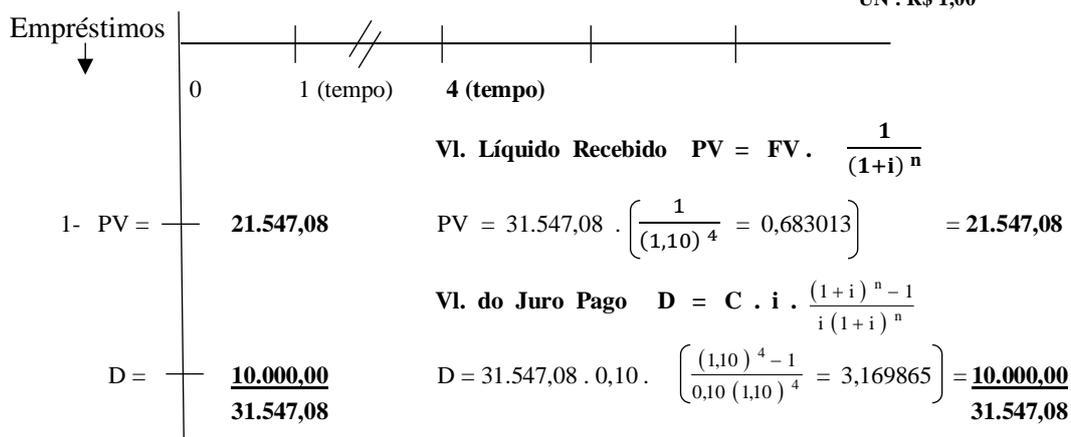
**Importante : Observar que as fórmulas de cálculos nas MODALIDADES 1 e 4 são iguais**

### Exemplificando o Plano Teórico Apresentado :

Os valores dos FV's pagos, bem como o valor da prestação de R\$ 31.547,08, são os mesmos em cada um dos 4 tempos nas 3 Modalidades de Pagamentos.

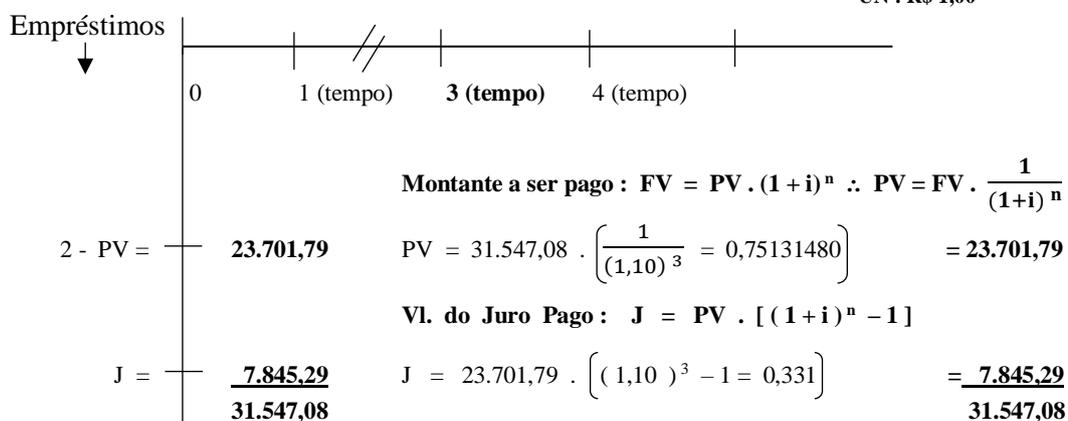
### Modalidade UM – Desconto Composto – Cálculos no Tempo 4

UN : R\$ 1,00



### Modalidade TRÊS – Montante – Cálculos no Tempo 3

UN : R\$ 1,00



## Modalidade QUATRO – Desconto Composto – Cálculos no Tempo 2

UN : R\$ 1,00

Prestação	0	1 (tempo)	2 (tempo)	3 (tempo)	4 (tempo)
3 - PV =	<b>26.071,97</b>		$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$		
			$PV = 31.547,08 \cdot \left[ \frac{1}{(1,10)^2} = 0,826446 \right]$		<b>= 26.071,97</b>
D =	<b>5.415,11</b>		$D = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$		
	<b>31.547,08</b>		$D = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot \left[ \frac{(1,10)^2 - 1}{0,10(1,10)^2} = 1,73553719 \right]$		<b>= 5.475,11</b>
					<b>31.547,08</b>

O Leitor poderá exercitar calculando, nas 3 MODALIDADES, os valores dos empréstimos e dos juros em cada pagamento nos Tempos 1, 2, 3 e 4 nas 3 MODALIDADES.

A MATEMÁTICA FINANCEIRA – NO JURO COMPOSTO – ensina QUATRO MODALIDADES DE PAGAMENTOS (AMORTIZAÇÕES) de Empréstimos e Financiamentos, sendo que, a MODALIDADE DOIS está em DESUSO. Analisaremos, então, as MODALIDADES UM, TRÊS e QUATRO, sendo que, a Modalidade Quatro, conhecida como **Sistema Francês de Amortização** (vulgar e erroneamente denominado TABELA PRICE) é em parcelas iguais, mensais, etc, anuais e sucessivas.

Obs.: Os valores dos FV's a serem pagos, nas 3 Modalidades são sempre os valores dos empréstimos nas Modalidades UM e TRÊS e das parcelas – pmt – na Modalidade QUADRO.

**Modalidade UM** –  $PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$  – Toma-se 4 empréstimos de igual valor em cada tempo e traz para a DATA ZERO; paga o valor do Juro antecipadamente e recebe o valor líquido. No vencimento paga o valor tomado emprestado.

		← Tempo – Desconto Composto ; FV = 31.547,08				Un. : R\$ 1,00
Empréstimos	0	1	2	3	4	Valor da prestação
1° PV =	21.547,08	Valor Líquido Recebido				$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^4}$
D =	<u>10.000,00</u>	Valor do Juro Pago Antecipado				$D = FV \cdot i \cdot \frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4}$
	31.547,08					
2° PV =	23.701,79	Valor Líquido Recebido				$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^3}$
D =	<u>7.845,29</u>	Valor do Juro Pago Antecipado				$D = FV \cdot i \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i(1+i)^3}$
	31.547,08					
3° PV =	26.071,97		$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$	Valor Líquido Recebido		
D =	<u>5.475,11</u>		$D = FV \cdot i \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i(1+i)^2}$	Valor do Juro Pago Antecipado		
	31.547,08					
4° PV =	28.679,16		$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)}$	Valor Líquido Recebido		
D =	<u>2.867,92</u>		$D = FV \cdot i \cdot \frac{(1+i) - 1}{i(1+i)}$	Valor do Juro Pago Antecipado		
	31.547,08					<b>Valor da prestação</b>
$\Sigma$ PV =	<b>100.000,00</b>					
$\Sigma$ D =	<b>26.188,32</b>					
$\Sigma$ pmt =	<b>126.188,32</b>					

Obs.: O Leitor pode realizar os cálculos

**Modalidade TRÊS :**  $FV = PV \cdot (1+i)^n \therefore PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$

$J = PV \cdot [(1+i)^n - 1]$

Toma-se 4 empréstimos de diferentes valores na DATA ZERO e paga, no vencimento de cada contrato, o valor – FV – de R\$ 31.547,08 que é o valor tomado, mais o valor do juro acumulado do período, nos tempos de 1 a 4.

**Obs.: Não se refere ao estudo de MONTANTES :**

$S_{\overline{n}|} = FV = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) + 1$

		Tempo – Juro Composto →				UN.: R\$ 1,00
Empréstimos		0	1	2	3	4
1	PV =	21.547,08	Valor tomado Empréstado		$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^4}$	
	J =	<u>10.000,00</u>	Valor do Juro Acumulado		$J = PV \cdot [(1+i)^4 - 1]$	
	FV =	<b>31.547,08</b>				
2	PV =	23.701,79	Valor tomado Empréstado		$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^3}$	
	J =	<u>7.845,29</u>	Valor do Juro Acumulado		$J = PV \cdot [(1+i)^3 - 1]$	
	FV =	<b>31.547,08</b>				
3	PV =	26.071,97	$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$		Valor tomado Empréstado	
	J =	<u>5.475,11</u>	$J = PV \cdot [(1+i)^2 - 1]$		Valor do Juro Acumulado	
	FV =	<b>31.547,08</b>				
4	PV =	28.679,16	$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)}$		Valor tomado Empréstado	
	J =	<u>2.867,92</u>	$J = PV \cdot [(1+i) - 1]$		Valor do Juro Acumulado	
	FV =	<b>31.547,08</b>				
	Σ FV =	<b><u>126.188,32</u></b>				
	Σ PV =	<b>100.000,00</b>				
	Σ J =	<b>26.188,32</b>				

**Obs.: 1 - Os empréstimos podem ser também na sequência 4, 3, 2, 1.**

**2 - E em cada tempo o valor do FV é igual**

## Modalidade QUATRO – Desconto Composto

$$\text{Valor da prestação} - \text{pmt} = \text{PV} \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad \text{Tábua III}$$

$$\text{pmt} = 100.000,00 \cdot \left[ \frac{0,10(1,10)^4}{(1,10)^4 - 1} = 0,315470 \right] = \text{R\$ } 31.547,08$$

$$\text{Valor do Desconto Composto} - D = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad \text{Tábua V}$$

		← Tempo – Desconto Composto					UN.: R\$ 1,00
Prestações		0	1	2	3	4	
1ª	PV =	21.547,08	=				$\text{PV} = 31.547,08 \cdot \left[ \frac{1}{(1,10)^4} = 0,68301346 \right]$
	D =	<u>10.000,00</u>	=				$D = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot \left[ \frac{(1,10)^4 - 1}{0,10(1,10)^4} = 3,16986545 \right]$
	pmt =	<b>31.547,08</b>					
		0	2	3	4	1	
2ª	PV =	23.701,79	=				$\text{PV} = 31.547,08 \cdot \left[ \frac{1}{(1,10)^3} = 0,7513148 \right]$
	D =	<u>7.845,29</u>	=				$D = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot \left[ \frac{(1,10)^3 - 1}{0,10(1,10)^3} = 2,48685199 \right]$
	pmt =	<b>31.547,08</b>					
		0	3	4	2	1	
3ª	PV =	26.071,97	=				$\text{PV} = 31.547,08 \cdot \left[ \frac{1}{(1,10)^2} = 0,82644628 \right]$
	D =	<u>5.475,11</u>	=				$D = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot \left[ \frac{(1,10)^2 - 1}{0,10(1,10)^2} = 1,73553719 \right]$
	pmt =	<b>31.547,08</b>					
		0	4	3	2	1	
4ª	PV =	28.679,16	=				$\text{PV} = 31.547,08 \cdot \left[ \frac{1}{(1,10)} = 0,9090909 \right]$
	D =	<u>2.867,92</u>	=				$D = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot \left[ \frac{(1,10) - 1}{0,10(1,10)} = 0,9090909 \right]$
	pmt =	<b>31.547,08</b>					
	$\Sigma$ pmt =	<b><u>126.188,32</u></b>					
	$\Sigma$ PV =	<b>100.000,00</b>					
	$\Sigma$ D =	<b>26.188,32</b>	(1)				

**O Diagrama do Fluxo de Caixa** no Manual do Proprietário da HP 12 C não apresenta um modelo que represente este Sistema Francês de Amortização – a MODALIDADE QUATRO DE PAGAMENTO em parcelas iguais, mensais e sucessivas.

Os cálculos matemáticos dos exemplos aqui apresentados, não tem reparos.

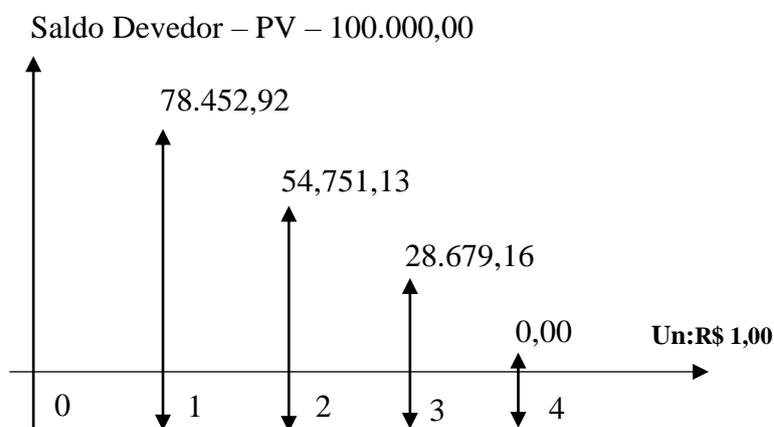
Nesta MODALIDADE QUATRO o valor do empréstimo ou do financiamento fica em poder do financiado que irá amortiza-lo (pagar) durante certo período de tempo.

E, para entender esta amortização, deve ser elaborado o seu **Plano de Amortização** como segue:

**QUADRO 1**  
**Plano de Amortização**

Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
-	-	-	-	100.000,00
1	31.547,08	21.547,0800	<b>10.000,0000</b>	78.452,9200
2	31.547,08	23.701,7880	7.845,2420	54.751,1320
3	31.547,08	26.076,9668	5.475,1132	28.679,1652
4	31.547,08	28.679,1635	2.867,9165	-
TOTAL	126.188,32	100.000,00	26.188,32	-

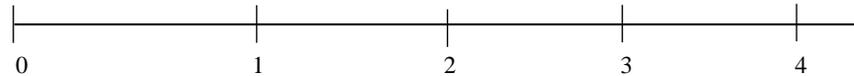
**O Diagrama do Fluxo de Caixa é o seguinte :**



Ver neste site na TRILHA : **Diagrama do Fluxo de Caixa / As Quatro Modalidades de Pagamentos e a Progressão Geométrica**

## RESUMO DE CADA MODALIDADE

UN: R\$ 1,00



### MODALIDADE UM

$\Sigma$ PV =	100.000,00	28.679,16	26.071,97	23.701,79	21.547,08
$\Sigma$ D =	<u>26.188,32</u>	<u>2.867,92</u>	<u>5.475,11</u>	<u>7.845,29</u>	<u>10.000,00</u>
$\Sigma$ pmt =	126.188,32	31.547,08	31.547,08	31.547,08	31.547,08

### MODALIDADE TRÊS

$\Sigma$ PV =	100.000,00	28.679,16	26.071,97	23.701,79	21.547,08
$\Sigma$ J =	<u>26.188,32</u>	<u>2.867,92</u>	<u>5.475,11</u>	<u>7.845,29</u>	<u>10.000,00</u>
$\Sigma$ pmt =	126.188,32	31.547,08	31.547,08	31.547,08	31.547,08

### MODALIDADE QUATRO

$\Sigma$ PV =	100.000,00	28.679,16	26.071,97	23.701,79	21.547,08
$\Sigma$ J =	<u>26.188,32</u>	<u>2.867,92</u>	<u>5.475,11</u>	<u>7.845,29</u>	<u>10.000,00</u>
$\Sigma$ pmt =	126.188,32	31.547,08	31.547,08	31.547,08	31.547,08

### **RESUMO → As três MODALIDADES SÃO IGUAIS**

Nas três MODALIDADES, por pagamento, paga-se sempre, o mesmo valor de R\$ 31.547,08 ( ou qualquer outro valor de exemplos dados ) e, em cada um dos pagamentos de R\$ 31.547,08, internamente, nas três MODALIDADES, em cada Tempo, tem os mesmos valores do principal – PV – e do juro – D ou J.

Tomamos, para ilustrar este RESUMO, os pagamentos no Tempo 4, nas Três MODALIDADES :  $21.547,08 + 10.000,00 = 31.547,08$

**ENTÃO :**

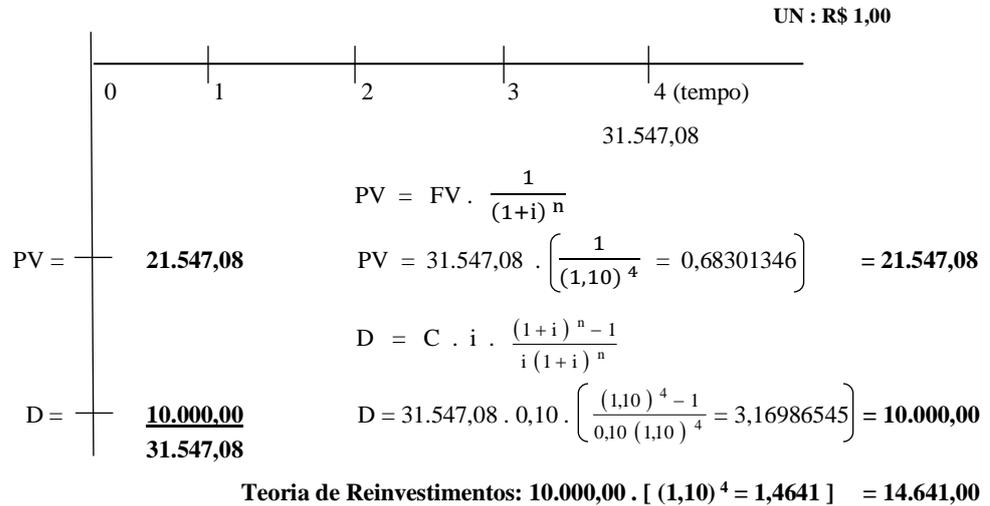
**Por que tanta discussão ? Se nas três MODALIDADES, os valores do principal – PV – e dos juros – J ou D, por pagamento, – empréstimos e / ou prestações – são sempre iguais.**

## RECEITA FINANCEIRA

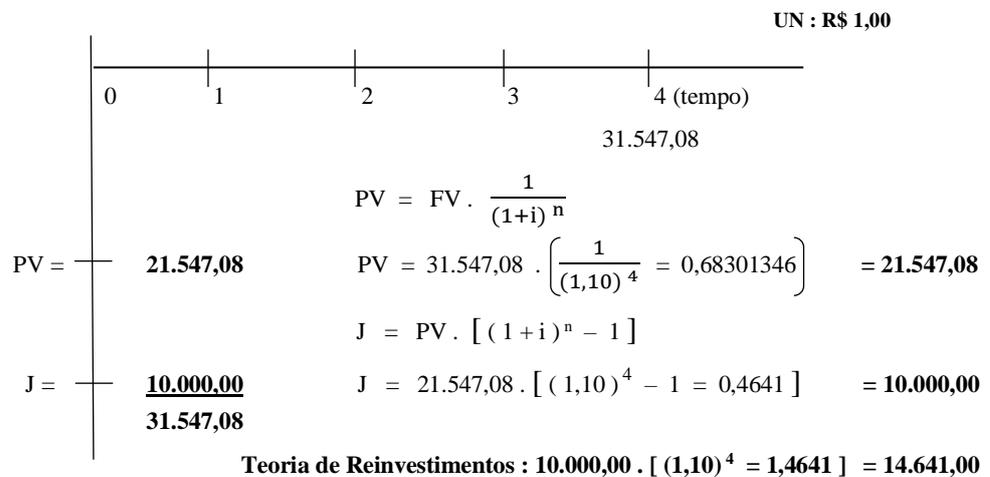
( no mesmo Tempo t )

Por empréstimo, nas MODALIDADES UM e TRÊS e comparados com o mesmo valor por prestação na MODALIDADE QUATRO no Tempo 4 e aplicando a Teoria de Reinvestimentos, a RECEITA FINANCEIRA para o Banco é a mesma, vejamos :

### MODALIDADE UM



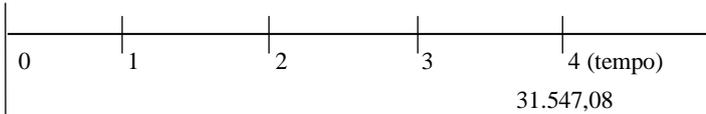
### MODALIDADE TRÊS



MODALIDADE QUATRO

$$pmt = PV \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 31.547,08 \cdot 0,31547080 = 9.952,1826$$

UN : R\$ 1,00



**QUADRO 1**

**Plano de Amortização – Tempo 4**

UN. R\$ 1,00

Tempo das Prestações	Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
	-	-	-	-	31.547,08
4	1	9.952,1826	6.797,4746	3.154,7080	24.749,6054
3	2	9.952,1826	7.477,2221	2.474,9605	17.272,3833
2	3	9.952,1826	8.224,9443	1.727,2383	9.047,4390
1	4	9.952,1826	9.047,4387	904,7439	-
		39.808,7303	31.547,08	8.261,6507	-

Custo Financeiro (1)

**Teoria de Reinvestimentos**

UN. R\$ 1,00

Prestação	Valor das Prestações		Valor dos Juros
4	9.952,1826	$[(1,10)^3 - 1]$	3.294,1724
3	9.952,1826	$[(1,10)^2 - 1]$	2.089,9583
2	9.952,1826	$[(1,10)^1 - 1]$	995,2183
1	9.952,1826	$[(1,10)^0 - 1]$	-
			6.379,3490 (2)
			8.261,6507 (1)
<b>Total da Receita Financeira (1 + 2)</b>			<b>14.640,9997</b>

**CONCLUSÃO : Tanto faz tomar 1 empréstimo nas MODALIDADES UM e TRÊS, como tomar 1 empréstimo na MODALIDADE QUATRO em n parcelas que, para o BANCO, a RECEITA FINANCEIRA é a mesma.**

## RESPONDENDO A PERGUNTA INICIAL :

Tanto faz :

- Tomar um empréstimo pela Modalidade UM, como pela Modalidade TRÊS, bem como pela Modalidade QUATRO, nas mesmas condições de  $n$ ,  $i$  e  $t$  que os valores do principal e dos juros em cada valor pago, são os mesmos nas datas  $t$  de seus pagamentos.

### • Exercício

No final de  $t = 4$  quero pagar R\$ 31.547,08.

Quanto deverei tomar emprestado – PV ?

Temos :  $n = 4$  e  $i = 10,00\%$

▪▪ Pela Modalidade UM –  $FV = PV \cdot (1 + i)^n$

$$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^4} = 31.547,08 \cdot \left( \frac{1}{1,4641} = 0,683013 \right) = \text{R\$ 21.547,08}$$

▪▪ Pela Modalidade TRÊS –  $FV = PV \cdot (1 + i)^n$

$$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^4} = 31.547,08 \cdot \left( \frac{1}{1,4641} = 0,683013 \right) = \text{R\$ 21.547,08}$$

▪▪ Pela Modalidade QUATRO

Temos que conhecer o valor do empréstimo, nestas condições que é a prestação no valor de R\$ 31.547,08, e conhecer o valor dos juros. Para isto, temos que elaborar o Plano de Amortização :

**QUADRO 1**  
**Plano de Amortização**

Prestação	Valor das Prestações	Valor da Amortização	Valor dos Juros	Saldos Devedores
-	-	-	-	100.000,00
1	31.547,08	21.547,08	<b>10.000,00</b>	78.452,92
2	31.547,08	23.701,7880	7.845,2420	54.751,1320
3	31.547,08	26.076,9668	5.475,1132	28.679,1652
4	31.547,08	28.679,1635	2.867,9165	-
TOTAL	126.188,32	100.000,00	26.188,32	-

Valor do PV nesta prestação  $t = 4$  :

$$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^4} = 31.547,08 \cdot \left( \frac{1}{1,4641} = 0,683013 \right) = \text{R\$ 21.547,08}$$

Qual o valor do juro neste R\$ 31.547,08 nas Três Modalidades no tempo  $t = 4$  ?

- Nas MODALIDADES 1 e 4 :

$$D = C \cdot i \cdot \frac{(1,10)^4 - 1}{0,10 (1,10)^4} = 31.547,08 \cdot 0,10 \cdot 3,169865 = \text{R\$ 10.000,00}$$

↑  
Tábua V

- Na MODALIDADE 3 :

$$J = C \cdot [ (1+i)^4 - 1 ]$$

↳ Varia de acordo com o tempo t ; no tempo 4 será R\$ 21.547,08

No tempo 4

$$J = 21.547,08 \cdot [ (1,10)^4 - 1 = 0,4641 ] = \mathbf{R\$ 10.000,00}$$