<u>**Tabela *Price*** - verdades que incomodam</u>

Por Edson Rovina

matemático

Mestrando em programação matemática pela UFPR

(métodos numéricos de engenharia)

Este texto aborda os seguintes aspectos:

- ✓ A capitalização dos juros na tabela Price;
- ✓ O falso argumento que a tabela *Price* é um regime de juros simples;
- ✓ Comprovação dos juros capitalizados na Tabela *Price* – fluxo de caixa;
- ✓ Comprovação dos juros capitalizados na Tabela *Price* – progressão Geométrica;
- ✓ Comprovação do regime de juros simples – *Gauss* – fluxo de caixa;
- ✓ Comprovação do regime de juros simples – *Gauss* – progressão aritmética.

Praticamente na totalidade dos livros de matemática financeira, os autores apresentam informações de como construir o Sistema Francês de Amortização, ou Tabela *Price*. Para facilitar a compreensão, vejamos o contido VIEIRA (1997, pg. 221):

> A parcela de juros é obtida multiplicando-se a taxa de juros (mensal, trimestral, semestral ou anual) pelo saldo devedor existente no período imediatamente anterior (mês, trimestre, semestre ou ano); a parcela de amortização é determinada pela diferença entre o valor da prestação e o valor da parcela de juros. Assim, o valor da parcela de juros referente à primeira prestação de uma série de pagamentos mensais é igual à taxa mensal multiplicada pelo valor do capital emprestado ou financiado (que é o saldo devedor inicial).

Para facilitar a compreensão vejamos um exemplo, considerando um capital de $10.00,00, taxa de juros de 10% ao mês, e prazo de 10 meses e utilizando as informações acima, elaboramos a evolução a seguir:

Quadro 1: Exemplo – Evolução Tabela Price

nº	saldo devedor	juros	amortização	prestação
0	10.000,00			
1	9.372,55	1.000,00	627,45	1.627,45
2	8.682,35	937,25	690,20	1.627,45
3	7.923,13	868,23	759,22	1.627,45
4	7.087,99	792,31	835,14	1.627,45
5	6.169,33	708,80	918,66	1.627,45
6	5.158,81	616,93	1.010,52	1.627,45
7	4.047,24	515,88	1.111,57	1.627,45
8	2.824,51	404,72	1.222,73	1.627,45
9	1.479,50	282,45	1.345,00	1.627,45
10	0,00	147,95	1.479,50	1.627,45

O primeiro destaque a ser dado é que muitos profissionais utilizam as informações para a construção da Tabela *Price* para afirmar que esta não capitaliza os juros e justificam tal fato pelo simples argumento de que os juros são calculados multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor imediatamente anterior.

Ocorre, porém, que tais informações, para a matemática são somente um algoritmo e não expressam nenhum conceito. Vou afirmar, a descrição de como construir a Tabela *Price,* como a da citação anterior, é apenas um algoritmo e não representa nenhum, absolutamente nenhum conceito dentro da matemática financeira. E para que não reste a menor dúvida vejamos:

> **Definição de Algoritmo**
> Para a Álgebra - seqüência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas (p.ex.: algoritmo para a extração de uma raiz cúbica);
> Para o processo de cálculo - encadeamento das ações necessárias ao cumprimento de uma tarefa; processo efetivo, que produz uma solução para um problema num número finito de etapas, (p.Ex.: o a. que permite obter o seno de x com uma certa precisão),
> Na matemática - mecanismo que utiliza representações análogas para resolver problemas ou atingir um fim, noutros campos do raciocínio e da lógica.
> Na informática - conjunto das regras e procedimentos lógicos perfeitamente definidos que levam à solução de um problema em um número finito de etapas
>
> **Definição de Conceito**

Expressão sintética, síntese.

Vamos agora analisar um pouco mais profundamente o argumento. Conforme mencionamos anteriormente, os defensores que a tabela *Price* não capitaliza os juros utilizam o argumento que o saldo devedor imediatamente anterior multiplicado pela taxa de juros produz o valor do juro. Assim tomando com exemplo o sexto período, temos a seguinte situação: $ 6.169,33 x 10% = $616,93. Ocorre porém que esta operação não representa nenhum conceito da matemática financeira.

Primeiramente, a matemática financeira é a ciência que tem como objetivo estudar as relações entre valores datados, e no calculo efetuado acima não temos nenhum referencial de data. Talvez alguns arrisquem em querer justificar que o referencial de data está representado pelo período e pelo período anterior, porém nesta situação, na utilização da tabela price, isso não é possível. Vejamos o porque.

Caso A: Juros Capitalizados

Na matemática financeira, juros capitalizados são determinados através da equação: $INT=PVx[(1+i)^n-1]$, onde, PV representa o capital, no presente caso o saldo devedor, i, representa a taxa de juros, n representa o prazo. Tomando como base o saldo devedor no quinto período, para o calculo dos juros referente ao sexto período, temos então que $PV=\text{saldo devedor}_{\text{quinto período}}=6.118,99$, a taxa de juros i=10% ao mês, e o prazo n=1, resultado da operação 6 (referente ao período em que se quer determinar juros) - 5 (referente ao período utilizado como base para o calculo), temos:

$INT = PVx[(1+i)^n-1]$

$INT =6.169,33x[(1+10\%)^1-1]$

$INT = 6.169,33x[1,10^1 – 1]$

$INT\ 6.169,33x\ [1,10-1]$

$\mathbf{INT = 6.169,33x\ 0,10}$

$INT = 616,93$

Caso B: Juros simples

Num outro diapasão, na matemática financeira juros simples são determinados através da equação *INT=PVxixn*, onde, PV representa o capital, no presente caso o saldo devedor, i, representa a taxa de juros, n representa o prazo. Tomando como base o saldo devedor no quinto período, para o calculo dos juros referente ao sexto período, temos então que PV=saldo $devedor_{quinto\ período}$=6.169,33, a taxa de juros i=10% ao mês, e o prazo n=1, resultado da operação 6 (referente ao período em que se quer determinar juros) - 5 (referente ao período utilizado como base para o calculo), temos:

$INT = PV \times I \times n$

$INT = 6.169,33 \times 10\% \times 1$

$\mathbf{INT = 6.169,33 \times 0,10}$

$INT = 616,93$

Caso A x Caso B

Ao efetuar os cálculos dos juros, diretamente sobre o saldo devedor do período anterior pela taxa não podemos afirmar nada, pois como pode ser observado nas linhas destacadas nos cálculos acima, verifica-se que ambos os conceitos, ou seja tanto juros simples como juros compostos, produzem o mesmo resultado quando apenas lidamos com um único ponto.

Ocorre que para o caso específico do prazo igual a 1, os juros determinados pelo regime de capitalização composta são exatamente iguais aos juros simples, vejamos porquê tal situação ocorre.

Juros Compostos	Juros Simples
$\lim_{n \to 1} PV \times \left[(1+i)^n - 1\right] = PV \times \left[(1+i)^1 - 1\right]$ $PV \times \left[(1+i) - 1\right]$ $PV \times \left[1 + i - 1\right]$ $PV \times i$	$\lim_{n \to 1} PV \times \left[(1 + n \times i) - 1\right] = PV \times \left[(1 + 1 \times i) - 1\right]$ $PV \times \left[(1+i) - 1\right]$ $PV \times \left[1 + i - 1\right]$ $PV \times i$

Afirmamos que a multiplicação da taxa de juros pelo saldo devedor imediatamente anterior, não representa nenhum conceito dentro da matemática financeira e embasa-se essa afirmativa pelo simples fato que um dos principais objetivos da matemática financeira é o estudo do capital ao longo do tempo, sendo que esse fator, o tempo, não se fazendo presente na referida expressão.

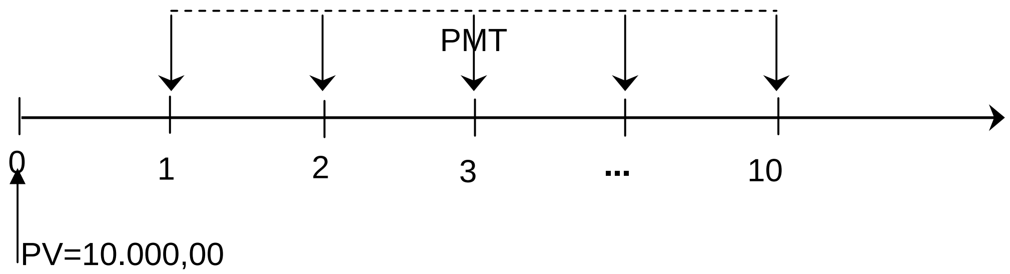
Ainda, a Matemática Financeira é um conjunto de conceitos elementares utilizados na análise do dinheiro ao longo do tempo. Dessa feita para a Matemática Financeira é importante o conhecimento de **quanto** e **quando** são efetuadas as operações com dinheiro, não fazendo nenhum sentido olhar somente um único ponto. Para realizar qualquer análise sob a ótica dessa ciência, deve-se conhecer com absoluta clareza, importantes informações de qual valor inicialmente despendido (o qual chama-se de capital) qual a data em que tal evento ocorreu (que denomina-se data focal zero), as datas em que ocorrem os pagamentos e os valores pagos, e outras informações.

A Tabela *Price* recebe inúmeras denominações, e entre tantos nomes destaca-se Sistema Francês de Amortização. Porém é importante conceituá-la dentro da Matemática Financeira, e na maioria das obras publicadas dessa ciência encontra-se como explicação que a Tabela *Price*, ou Sistema Francês de Amortização é um **sistema** de pagamentos constituído de um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas dentro do conceito de termos vencidos.

Destacou-se a palavra **sistema** pelo fato que tal palavra tem profunda relevância, pois como se pode verificar em qualquer dicionário da língua portuguesa *sistema significa conjunto de elementos, concretos ou* *abstratos, intelectualmente organizados*, ou ainda, *conjunto de idéias logicamente solidárias, consideradas nas suas relações*.

Pelo que até aqui se comentou, verifica-se que de um lado a Matemática Financeira estuda um conjunto de informações como um todo e que a Tabela *Price*, é um conjunto e por essas simples considerações não faz sentido e não apresenta respaldo técnico querer analisar apenas um único ponto dentro de todo o sistema. Não se procedendo à análise como um todo conforme conceituado acontecem inverídicas conclusões sobre o regime de juros do Sistema Francês de Amortização ou Tabela *Price*.

Ainda, em relação ao exemplo inicial, suponhamos que não conhecemos a equação que determina a prestação, e que considerado o capital de R$ 10.000,00, emprestado a uma taxa de juros de 10% ao mês, a ser pago em 10 prestações mensais e consecutivas, considerando a **capitalização mensal dos juros**. Pela suposição que fizemos não conhecemos a equação, assim, aplicando os conceitos de fluxo de caixa, temos:



Calculando o valor de cada uma das prestações na data focal 10 (prazo) tem-se que a primeira prestação **capitaliza os juros durante 9 meses**, e aplicando o conceito de capitalização composta podemos escrever:

$FV=PMTx(1+10\%)^9 \Rightarrow FV= PMTx1,10^9 \Rightarrow FV=2,357948x\ PMT$

A segunda prestação **capitaliza os juros por 8 meses**, e aplicando o conceito de capitalização composta podemos escrever:

$FV=PMTx(1+10\%)^8 \Rightarrow FV= PMTx1,10^8 \Rightarrow FV=2,143589x\ PMT$

E assim procedendo para cada uma das 10 prestações temos o quadro a seguir.

Quadro 2: Determinação da prestação com juros capitalizados

nº da prestação	prazo de capitalização			
1	9	FV=PMTx(1+10%)^9	->	2,357948xPMT
2	8	FV=PMTx(1+10%)^8	->	2,143589xPMT
3	7	FV=PMTx(1+10%)^7	->	1,948717xPMT
4	6	FV=PMTx(1+10%)^6	->	1,771561xPMT
5	5	FV=PMTx(1+10%)^5	->	1,61051xPMT
6	4	FV=PMTx(1+10%)^4	->	1,4641xPMT
7	3	FV=PMTx(1+10%)^3	->	1,331xPMT
8	2	FV=PMTx(1+10%)^2	->	1,21xPMT
9	1	FV=PMTx(1+10%)^1	->	1,1xPMT
10	0	FV=PMTx(1+10%)^0	->	1xPMT
			Total	15,937425xPMT

Agora, como uma das características necessárias as prestações, devem ser todas do mesmo valor, assim podemos somá-las, e no final do período, ou seja, no prazo 10, temos, FV = 15,397425xPMT (1).

De outro lado o valor emprestado de R$ 10.000,00, também pode ser calculado no final do período, ou seja no prazo 10, pelo **conceito de capitalização mensal**, temos,

$FV=10.00,00x(1+10\%)^{10}$
$FV= 10.00,00x1,10^{10}$
FV=10.000,00x 2,59374246
FV= 25.937,42 (2)

Como todos os valores estão no final do contrato, ou seja, no prazo 10, podemos substituir o valor de FV obtido na equação 2, na equação 1, assim temos,

FV = 15,937425xPMT
25.937,42 = 15,937425xPMT

E isolando o valor de PMT, temos,

$$PMT = \frac{25.937,42}{15,937425}$$

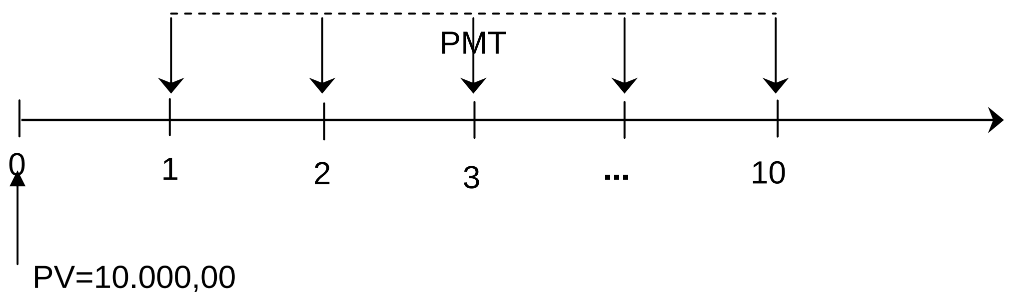
PMT = 1.627,45.

Destacamos que **<u>somente utilizando os conceitos de capitalização compostas obtivemos o mesmo valor da prestação utilizada no Sistema francês de amortização ou tabela Price.</u>** E justamente para que tais procedimentos não fossem efetuados a cada vez que desejássemos determinar a prestação, foi deduzida a equação

$$PMT = \frac{PV \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Portanto, não há que se falar, que a prestação não guarda vínculo com a tabela Price, muito menos dizer que tal procedimento não carrega a capitalização mensal dos juros, isto fica evidente no exemplo acima.

No outro extremo, vamos supor, considerando os mesmos dados do exemplo, que comprovamos numericamente que capitaliza os juros, fosse agora desenvolvido dentro dos conceitos de juros simples. Então considerado o capital de R$ 10.000,00, emprestado a uma taxa de juros de 10% ao mês, a ser pago em 10 prestações mensais e consecutivas, dentro do conceito de **<u>juros simples</u>**. Pela suposição que fizemos não conhecemos a equação, assim, aplicando os conceitos de fluxo de caixa, temos:



Calculando o valor de cada uma das prestações na data focal 10 (prazo) tem-se que a primeira prestação com <u>juros simples</u> calculados por 9 períodos, pode ser escrita:

FV=PMTx(1+ 10% x 9) ⇒ FV= PMTx(1+0,10x9) ⇒FV=1,90x PMT

A segunda prestação com <u>juros simples</u> calculados por 8 períodos, pode ser escrita:

FV=PMTx(1+ 10% x 8) ⇒ FV= PMTx(1+0,10x8) ⇒FV=1,80x PMT

E assim procedendo para cada uma das 10 prestações temos o quadro a seguir.

Quadro 3: Calculo da prestação a juros simples

nº	prazo de juros simples			
1	9	FV=PMTx(1+10%x9)	->	1,9xPMT
2	8	FV=PMTx(1+10%x8)	->	1,8xPMT
3	7	FV=PMTx(1+10%x7)	->	1,7xPMT
4	6	FV=PMTx(1+10%x6)	->	1,6xPMT
5	5	FV=PMTx(1+10%x5)	->	1,5xPMT
6	4	FV=PMTx(1+10%x4)	->	1,4xPMT
7	3	FV=PMTx(1+10%x3)	->	1,3xPMT
8	2	FV=PMTx(1+10%x2)	->	1,2xPMT
9	1	FV=PMTx(1+10%x1)	->	1,1xPMT
10	0	FV=PMTx(1+10%x0)	->	1xPMT
			Total	14,5xPMT

Agora, como uma das características necessárias as prestações, devem ser todas do mesmo valor, assim podemos somá-las, e no final do período, ou seja, no prazo 10, temos, FV = 14,50xPMT (3).

De outro lado o valor emprestado de R$ 10.000,00, também pode ser calculado no final do período, ou seja, no prazo 10, pelo conceito de juros simples temos,

FV=10.000,00x(1+10%x10)
FV=10.000,00x(1+0,10x10)
FV=10.000,00x 2,000
FV=20.000,00 (4)

Como todos os valores estão no final do contrato, ou seja, no prazo 10, podemos substituir o valor de FV obtido na equação 4, na equação 3, assim temos,

FV = 14,50xPMT
20.000,00= 14,50xPMT

E isolando o valor de PMT, temos,

$$PMT = \frac{20.000,00}{14,50}$$

PMT = 1.379,31.

Resta agora verificar se o Método de Juros Amortização a Juros Simples (Gauss) irá produzir o mesmo resultado, dessa forma aplicando a equação

$$PMT = \frac{k \times (i\% \times n) + k}{\left\{\left[\frac{i\% \times (n-1)}{2}\right] + 1\right\} \times n}$$

Onde PMT, representa a Prestação, ***k*** representa o capital, ***i*** representa a taxa de juro mensal e ***n*** representa o prazo, e considerando os dados do exemplo, com k=10.000,00, i=10*% am.*, n=10, temos:

$$PMT = \frac{10.000,00 \times (10\% \times 10) + 10.000,00}{\left\{\left[\frac{10\% \times (10-1)}{2}\right] + 1\right\} \times 10} = 1.379,31$$

Ou seja, a equação que determina a prestação dentro do Regime de Amortização a Juros Simples (Gauss) retorna exatamente o mesmo valor da prestação calculada a juros simples.

Qualquer plano de amortização é construído tomando-se como base o fracionamento do capital, podendo ser em parcelas iguais ou não, e sobre cada uma das frações do capital são calculados juros, que pode ser simples ou composto, até o último recebimento.

O campo da MATEMÁTICA que lida com esse processo, é denominado de ÁLGEBRA, e como estamos lidando com prestações fixas, os conceitos de Progressão Geométrica - PG e Progressão Aritmética – PA são plenamente aplicáveis no exemplo dado.

Para compreendermos completamente como ocorre o processo dentro de um sistema de amortização quer seja ele à regime de juros simples, ou à regime de juros compostos, vamos continuar analisando o exemplo anterior, ou seja, um capital de $10.00,00, taxa de juros de 10% ao mês, e prazo de 10 meses.

Inicialmente vamos considerar os conceitos de Progressão Geométrica – PG, e para efetuarmos os cálculos vamos considerar que o capital de $ 10.000,00, passa a ser a soma dos termos da PG, o prazo de 10 de meses passa a ser a quantidade de termos e obviamente que a taxa de juros de 10% deve ter alguma relação com a razão. A parcela inicial de amortização pode ser obtida pela fórmula da soma dos ternos de uma P.G., conforme demonstrando a seguir:

$$S_n = \frac{a_1 \times \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

Onde, **S_n**= soma das amortizações, ou seja, valor total financiado; **A_1 =** Primeira parcela de amortização, **q =** razão de crescimento representada, no caso de analise, pelo fator (1+taxa de juros) e **n=** prazo de reembolso de capital, e substituindo os valores, temos:

$$10.000{,}00 = \frac{a_1 \times \left[(1 + 10\%)^{10} - 1\right]}{(1 + 10\%) - 1}$$

$$10.000{,}00 = \frac{a_1 \times (2{,}59374246 - 1)}{0{,}10}$$

$$a_1 = \frac{10.000{,}00 \times 0{,}10}{1{,}59374246}$$

$$a_1 = 627{,}45$$

Destaca-se que o valor da primeira cota de amortização obtida através do cálculo acima é exatamente igual ao valor da cota de amortização do exemplo (quadro 1).

A razão da progressão geométrica utilizada é dada em função da taxa de juro definida de 10,00% ao mês, expressa na equação acima pelo termo (1 + 10%), e do conceito de juros compostos, tem-se:

Juros compostos: expresso pela equação $FV = PV \times (1+i)^n$, onde *FV* representa o valor futuro, *PV* representa o valor presente ou valor financiado, *i* representa a taxa de juros e *n* representa o prazo;

Agora comparando as equações, tem-se:

$$10.000,00 = \frac{a_1 \times \left[(1+10,00\%)^{10} - 1 \right]}{(1+10\%) - 1}$$

Este é o conceito de juros compostos – basta comparar o termo com a equação

$$FV = PV \times (1+i)^n$$

que é a equação característica dos regimes de juros capitalizados

Portanto, o cálculo apresentado, faz menção a taxa de juros, e como pode-se observar acima, o conceito adotado é de juros compostos. De posse do valor da primeira parcela de amortização pode-se mensurar as demais mediamente a aplicação de técnicas de progressão geométrica conforme demonstrado a seguir:

$$a_t = a_1 \times q^{t-1}$$

$$a_1 = 627,45$$

$$a_2 = a_1 \times (1+10\%)^{2-1} = 627,45 \times 1,10^1 = 690,20$$

Conceito de capitalização composta, para o incremento das parcelas de

•

•

•

$$a_9 = a_1 \times (1+10\%)^{9-1} = 627,45 \times 1,10^8 = 1.345,00$$

$$a_{10} = a_1 \times (1+10\%)^{10-1} = 627,45 \times 1,03^9 = 1.479,50$$

Observa-se o detalhe que a razão da progressão geométrica ***q***, no presente caso é expressa por (1+10%), e a da análise dos termos $(1+10\%)^{2-1}$, ...,

$(1+10\%)^{9-1}$ e $(1+10\%)^{10-1}$ podemos facilmente identificar a expressão de juros capitalizados, que é dada por $FV = PV \times (1+i)^n$.

Agora, tomando como base as parcelas de amortização, calculam-se os juros de forma capitalizada para o prazo final, assim tem-se:

$$j_i = a_i \times \left[(1+i)^{n-i+1} - 1\right]$$

Este conceito é de capitalização composta

$$j_1 = 627{,}45 \times \left[(1+10\%)^{10-1+1} - 1\right] = 627{,}45 \times \left[1{,}10^{10} - 1\right] = 1.000{,}00$$

$$\vdots$$

$$j_9 = 1.345{,}00 \times \left[(1+10\%)^{10-9+1} - 1\right] = 1.345{,}00 \times \left[1{,}10^{2} - 1\right] = 282{,}45$$

$$j_{10} = 1.479{,}50 \times \left[(1+10\%)^{10-10+1} - 1\right] = 1.479{,}50 \times \left[1{,}10^{1} - 1\right] = 147{,}95$$

Identificam-se facilmente os juros capitalizados de cada uma das parcelas de amortização, no presente caso, para tanto basta comparar cada um dos cálculos de juros com a expressão de juros compostos $FV = PV \times (1+i)^n$. Ainda destacamos que os valores obtidos são exatamente iguais aqueles obtidos no exemplo inicial (quadro 1)

Agora, o valor de cada prestação paga no Sistema Francês de Amortização ou tabela *“Price”* é dado pela soma de cada parcela de amortização com a sua respectiva parcela de juros, assim tem-se:

$$PMT_1 = a_1 + j_1 = 627{,}45 + 1.000{,}00 = 1.627{,}45$$

.

.

.

$$PMT_9 = a_9 + j_9 = 1.345{,}00 + 282{,}45 = 1.627{,}45$$

$$PMT_{10} = a_{10} + j_{10} = 1.479{,}50 + 147{,}95 = 1.627{,}45$$

Obviamente que o valor igual de cada uma das prestações não é mera coincidência, isso é a característica do Sistema Francês de Amortização ou Tabela *“Price”*, e por esse procedimento fica claro e cristalino como são cobrados os juros capitalizados.

Vamos agora considerar os conceitos de Progressão Aritmética – PA, e para efetuarmos os cálculos vamos considerar que o capital de $ 10.000,00, passa a ser a soma dos termos da PG, o prazo de 10 de meses passa a ser a quantidade de termos e obviamente que a taxa de juros de 10% deve ter alguma relação com a razão.

A parcela inicial de amortização pode ser obtida pela fórmula da soma dos ternos de uma P.A. conforme demonstrando a seguir:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Onde, $\mathbf{S_n}$= soma das amortizações, ou seja, valor total financiado; $\mathbf{a_1}$**=** Primeira parcela de amortização, $\mathbf{a_n}$ **=** última parcela de amortização e **n=** prazo de reembolso de capital, e ainda a equação

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

Onde, $\mathbf{a_1}$**=** Primeira parcela de amortização, $\mathbf{a_n}$ **=** última parcela de amortização e **n=** prazo de reembolso de capital, e **r =** a razão da progressão aritmética, substituindo os valores, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 10.000,00 = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} \Rightarrow 2.000,00 = a_1 + a_{10}$$
$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{10} = a_1 + (10-1)r \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r$$

que produz o sistema de equações

$$\begin{cases} 2.000,00 = a_1 - a_{10} \\ a_{10} = a_1 + 9r \end{cases}$$

que apresenta infinitas soluções, com $\left\{ a_1 = 1.000,00 - \frac{9}{2}r, a_{10} = 1000 + \frac{9}{2}r, r = r \right\}$.

Seguindo o mesmo processo observado para o caso de juros compostos, e como queremos trabalhar com juros simples, podemos escrever a relação

$r=a_1x[(1+ixn)-1]$, considerando n=1(somente um período) e i= 10%, taxa de juros (ela tinha de aparecer em algum lugar). Assim reescrevendo a equação, obtemos:

$r=a_1x[(1+ixn)-1]$
$r=a_1x[(1+10\%x1)-1]$
$r=0,10xa_1$

dessa forma o sistema de equações passa a ser:

$$\begin{cases} 2.000,00 = a_1 - a_{10} \\ a_{10} = a_1 + 9r \\ r = 0,10a_1 \end{cases}$$

que agora somente apresenta uma solução com $\{a_1 = 689,66, a_{10} = 1.310,34, r = 68,97\}$. De posse do valor da primeira parcela de amortização e da razão, pode-se mensurar as demais mediamente a aplicação de técnicas de progressão aritmética conforme demonstrado a seguir:

$a_1=689,66$

.

.

.

$a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow a_9=689,66+(9-1)x68,97 \Rightarrow a_9=1.241,42$
$a_{10}=689,66+(10-1)x68,97 \Rightarrow a_{10}=1.310,39$

Agora, tomando como base as parcelas de amortização, calculam-se os juros de forma simples para o prazo final, assim tem-se:

$$j_t = a_i \times [(1 + ix(n - t + 1) - 1]$$
$$j_1 = 689,66 \times [(1 + 10\%(10 - 1 + 1)) - 1] = 689,66 \times [2,00 - 1] = 689,66$$

Ocorre que para manter a estabilidade do sistema, os juros obrigatoriamente passam a ser determinados através da mesma razão da progressão aritmética, ou seja, r=68,97, porém considerando agora uma PA decrescente, assim reescrevendo a razão, temos r=-68,97, e os juros passam a ser:

j_1=689,66

.

;

.

$j_9 = j_1+(n-1)r$ = 689,66 + (9-1)(-68,97) = 689,66 - 8x68,97 = 137,90

$j_{10} = j_1+(n-1)r$ =689,66 + (10-1)(-68,97) = 689,66 – 9x68,97 = 68,93

Identificam-se facilmente os juros simples de cada uma das parcelas de amortização, no presente caso, para tanto basta comparar, cada um dos cálculos de juros com a expressão de juros compostos $FV = PV \times i \times n$. Resta saber se a soma de cada uma das parcelas vai gerar uma prestação constante, assim somando a parcela de juros com a parcela de amortização, tem-se:

$PMT_1 = a_1+j_1$ =689,66 +689,66 = 1.379,32

.

.

.

$PMT_9= a_9+j_9$ = 1.241,42 + 137,90 = 1.379,32

$PMT_{10}= a_{10}+j_{10}$ = 1.310,39 + 68,93 = 1.379,32

Agora, verificando se tal distribuição de amortização e juros, e consequentemente prestação, correspondem a algum método de amortização. Assim para o exemplo proposto, ou seja, um capital de $10.00,00, taxa de juros de 10% ao mês, e prazo de 10 meses, vamos construir um sistema de amortização a juros simples, que ultimamente tem também ganhado a denominação de *Gauss*.

Quadro 4: Gauss

nº	saldo	juros	amort	Prest
0	10.000,00	-	-	-
1	9.310,34	689,65	689,66	1.379,31
2	8.551,72	620,69	758,62	1.379,31
3	7.724,13	551,72	827,59	1.379,31
4	6.827,58	482,76	896,55	1.379,31
5	5.862,06	413,79	965,52	1.379,31
6	4.827,58	344,83	1.034,48	1.379,31
7	3.724,13	275,86	1.103,45	1.379,31

8	2.551,72	206,90	1.172,41	1.379,31
9	1.310,34	137,93	1.241,38	1.379,31
10	0,00	68,97	1.310,34	1.379,31

A pequena diferença verificadas nos resultados apresentados no quadro 4 e cálculos anteriormente efetuados é decorrente da precisão adotadas em cada um dos procedimentos, sendo que para o presente caso, os valores podem ser considerados iguais.

Finalmente, o quadro a seguir, resume os diversos aspectos discutidos no presente.

Bobagens	Verdades
A equação que determina a prestação na Tabela Price é somente utilizada uma vez, e não guarda vínculo com a mesma	- A prestação é utilizada em todas as parcelas
	- Determina-se também o valor da prestação através da soma de uma PG
	- A prestação é determinada pela equação, para evitar que todas as vezes precisamos efetuar as considerações conforme um fluxo de caixa ou PG
Os juros na tabela *Price* são calculados multiplicando-se o saldo devedor imediatamente anterior pela taxa de juros e esse é conceito de juros simples	- confundem algoritmo com conceito de juros simples
	- o saldo devedor imediatamente anterior multiplicado pela taxa de juros não é conceito de juros simples ou de juros compostos, é apenas uma relação matemática
	- não pode ser considerado como argumento para firmar nada
	- somente podemos analisar uma série de pagamentos dentro do conceito de fluxo de caixa
As prestações descontadas das cotas de juros representam a amortização, portanto não há juros sobre juros	- não se pode analisar somente um período, deve-se analisar todo o sistema de amortização dentro dos conceitos de matemática financeira
juros sobre juros não são a mesma coisa que capitalizam composta, pois se os juros foram pagos não há capitalização	- não se pode analisar somente um período, deve-se analisar todo o sistema de amortização dentro dos conceitos de matemática financeira
A divisão de uma exponencial por outra exponencial anula o efeito da capitalização composta	- sem comentários - quem fala isso nem sequer conhece os conceitos básicos da matemática
É um sistema mundialmente utilizado	- é mundialmente utilizado, mas quem deve prevalecer é a legislação